ORSAY

SERIE A

Nº D'ORDRE : 1114

THESE

DE DOCTORAT D'ETAT ES-SCIENCES PHYSIQUES

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

PAR

Yves BELVAUX

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES

REALISATION OPTIQUE DE LA TRANSFORMEE DE HILBERT ET APPLICATIONS

SOUTENUE LE 14 MAI 1973 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

PRESIDENT	M.	A. MARECHAL
EXAMINATEURS	MM.	M. FRANÇON
		P. GIACOMO
		S. LOWENTHAL (RAPPORTEUR)

ORSAY

SERIE A

Nº D'ORDRE :

THESE

DE DOCTORAT D'ETAT ES-SCIENCES PHYSIQUES

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

PAR

Yves BELVAUX

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES

REALISATION OPTIQUE DE LA TRANSFORMEE DE HILBERT ET APPLICATIONS

SOUTENUE LE 14 MAI 1973 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

PRESIDENT	M. A. MARECHAL	
EXAMINATEURS	MM. M. FRANÇON	
	P. GIACOMO	
	S. LOWENTHAL	(RAPPORTEUR)

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Je tiens ici à remercier Monsieur A. MARECHAL qui a bien voulu présider mon jury de thèse ainsi que Messieurs M.FRANÇON et P. GIACOMO qui ont accepté de faire partie de ce jury.

Que Monsieur S. LOWENTHAL qui a dirigé ce travail et dont l'aide, les conseils et les encouragements ont permis qu'il soit mené à son terme, soit assuré de ma profonde gratitude.

Je remercie également les différents stagiaires, Messieurs ROMAIN, VAREILLE, DENEVE et SAÏMI qui ont participé à ce travail ainsi que toutes les personnes du laboratoire pour les fructueuses discussions qu'elles ont eues avec moi et particulièrement Monsieur D. PHALIPPOU pour sa collaboration efficace.
Mesdames O. CAIL et J. PRIM ont participé activement à la mise en forme de ce mémoire, qu'elles soient ici remerciées ainsi que les services généraux et administratifs de l'Institut d'Optique où a été effectué ce travail.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548022_0005

SOMMAIRE

CHAPITRE 1 - LA TRANSFORMEE DE HILBERT EN OPTIQUE

1 - INTRODUCTION

2 - LA TRANSFORMEE DE HILBERT

2.1. Définition de la transformée de Hilbert

2.2. La transformée de Hilbert permet de visualiser de faibles déphasages

2.3. Le théorème de réduction

2.4. Transformée de Hilbert d'un objet de transmittance uniforme

CHAPITRE 2 - REALISATION PRATIQUE DE LA TRANSFORMATION DE HILBERT - TRANSFORMEE DE HILBERT - TRANSFORMEE DE HILBERT MIXTE

1 - EXPRESSION GENERALE DE LA REPONSE A UN FILTRE DE PHASE

2 - INFLUENCE DE L'ABSORPTION

3 - INFLUENCE D'UNE ERREUR DE DEPHASAGE

4 - DECENTREMENT ET LARGEUR DE LA SOURCE

4.1. Décentrement de la source

4.2. Décentrement du couteau

4.3. Source large

5 - RESULTATS EXPERIMENTAUX

6 - CONCLUSION

CHAPITRE 3 - APPLICATION DE LA TRANSFORMEE DE HILBERT A L'ETUDE DES ABERRATIONS

1 - INTRODUCTION

2 - CAS DES FORTES ABERRATIONS - ETUDE GEOMETRIQUE

2.1. Visualisation d'un défaut de phase ou d'une abérration par la méthode de Foucault

2.2. Méthode par transformée de Hilbert

2.3. Influence de la diffraction

CHAPITRE 7 - SOUSTRACTION DE LUMINANCES

1 - INTRODUCTION

2 - PRINCIPE DE LA METHODE

2.1. Enregistrement de l'hologramme

2.2. Restitution

3 - MONTAGES D'ENREGISTREMENT

3.1. Montage utilisant un prisme de Wollaston

3.2. Montage utilisant un prisme de Savart

3.3. Restitution - Choix de la bande passante

4 - RESULTATS EXPERIMENTAUX

5 - CONCLUSION

CHAPITRE 8 - CONCLUSIONS

2.4. Application à l'étude des aberrations
2.5. Cas d'une aberration sphérique
2.6. Utilisation du profil d'incurvation
2.7. Cas de l'astigmatisme

3 - CAS DES FAIBLES ABERRATIONS

4 - CAS D'UNE BOSSE DE PHASE

5 - RESULTATS EXPERIMENTAUX

6 - CONCLUSION

CHAPITRE 4 - LE BRUIT COHERENT ET SA REDUCTION

1 - NECESSITE DE REDUIRE LE BRUIT

2 - TRANSFORMEE DE HILBERT OBSERVEE EN ECLAIRANT PAR UNE FENTE

3 - ETUDE DU RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT

4 - REALISATION PRATIQUE D'UNE SOURCE LINEAIRE DE GRANDE DIMENSION

CHAPITRE 5 - TRANSFORMEE DE HILBERT EN LUMIERE BLANCHE

1 - LAME DE HILBERT BIREFRINGENTE

2 - ETUDE THEORIQUE

3 - DIAGRAMME DE FRESNEL

4 - TRANSFORMEE DE HILBERT EN LUMIERE BLANCHE

CHAPITRE 6 - VISUALISATION A L'AIDE D'UN FILTRE A DEPHASAGE QUELCONQUE - FILTRES POLARISANTS

1 - PRINCIPE DE LA VISUALISATION

2 - DIAGRAMME DE FRESNEL

3 - OBSERVATION DE PETITS DEFAUTS DE SURFACE

4 - FILTRE DE HILBERT REALISE A L'AIDE DU POLAROID

5 - CONCLUSION

LA TRANSFORMEE DE HILBERT EN OPTIQUE COHERENTE

On étudie un certain nombre de problèmes relatifs à la réalisation par filtrage optique cohérent de la transformation de Hilbert et l'on montre qu'elle permet de visualiser des objets très faiblement déphasants de basses fréquences spatiales dont l'observation par les méthodes classiques présente des difficultés {1}{2}{3} .

On analyse théoriquement le processus de réalisation optique de la transformée de Hilbert et de transformées voisines que nous définissons comme "transformées de Hilbert mixtes" et l'on présente des applications.

Dans tout processus de formation d'images en éclairage laser cohérent, les fluctuations dues au bruit sont amplifiées par interférences entre l'image et le bruit. Cet effet est particulièrement gênant dans le cas présent où l'on veut examiner de faibles déphasages. Nous avons cherché à diminuer ces effets en proposant deux méthodes :

- d'une part un éclairage en lumière blanche (source de faibles dimensions) et nous avons montré que ceci était paradoxalement possible en utilisant un bilame de KASTLER comme filtre de Hilbert {20}{23}.
- d'autre part, en synthétisant un éclairage par une fente partiellement incohérente à l'aide d'un laser.

On montre que ces méthodes permettent de se rapprocher des conditions plus favorables de l'éclairage incohérent en ce qui concerne le bruit tout en conservant les possibilités de traitement de l'éclairage cohérent.

...

Une autre difficulté des méthodes cohérentes est l'existence de franges de diffraction parasites. En vue de leur suppression, nous avons proposé de les éliminer par une méthode de soustraction d'images voisine de celle de PENNINGTON {32}.

Cette méthode, qui utilise des "hologrammes-images"{35}, semble présenter un intérêt qui dépasse l'application au cas présent. Elle réalise en effet la soustraction de luminances, ce qui évite les effets de bruit cohérent et de phase, mais permet aussi de mettre en évidence sous forme d'image la différence entre deux états successifs d'un système en évolution.

Dans le premier chapitre, on rappelle les propriétés mathématiques de la transformation de Hilbert, et l'on montre qu'elle peut être réalisée optiquement à l'aide d'un filtre déjà utilisé par WOLTER pour réaliser son "Minimumschlierenverfahren"{2} et qui déphase de 180° les fréquences spatiales positives par rapport aux fréquences spatiales négatives.

Le deuxième chapitre est consacré aux problèmes que pose la réalisation pratique d'un "filtre de Hilbert" et l'on étudie en particulier l'influence du déphasage qui peut ne pas être strictement égal à π et de l'absorption que peut présenter l'une des plages du filtre disposé dans le plan spectral, absorption qui permet d'obtenir ce que nous avons appelé la "transformée de Hilbert mixte" qui s'exprime comme une combinaison linéaire de la fonction objet et de sa transformée de Hilbert. On y montre, en outre, que la transformation de Hilbert joue un rôle fondamental dans l'étude théorique des différentes méthodes de visualisation d'objets de phase utilisant un couteau disposé dans le plan spectral (contraste de phase, méthode de Foucault) {5}{6}{7}.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la transformée de Hilbert et des transformées voisines appliquées à la visualisation des objets de phase de basses fréquences, en particulier de l'aberration sphérique du troisième ordre. Dans cette étude, nous avons été amenés à distinguer deux cas suivant que les aberrations étaient importantes ou non. Dans le cas des fortes aberrations un raisonnement purement géométrique s'avère suffisant et la transformée de Hilbert permet, comme la méthode de Foucault, d'obtenir le profil tangentiel de l'onde {15}, mais avec une précision supérieure dans les pointés. Dans le cas des faibles aberrations,

...

on a pu montrer que la réalisation d'une "transformée de Hilbert mixte" conduisait à une méthode plus sensible que la méthode de Foucault, méthode qui présente cependant l'avantage d'employer un filtre extrêmement facile à réaliser puisqu'il est constitué par une simple lame de rasoir.

Le chapitre 4 est consacré à l'étude du bruit et à la façon de le réduire. On y montre que l'utilisation d'une fente-source parallèle à l'arête du filtre ne change rien en ce qui concerne l'obtention de la transformée de Hilbert. Par contre, une telle fente diminue notablement le bruit et, dans l'hypothèse d'un bruit gaussien, on montre que le rapport signal sur bruit dans l'image est proportionnel à la racine carrée de la longueur de la source.

Les chapitres 5 et 6 traitent de différents types de montages qui ont été réalisés. On y décrit en particulier un filtre obtenu à partir d'un bilame biréfringent de KASTLER qui, utilisé comme "filtre de Hilbert", permet par simple rotation d'un analyseur d'observer la transformée de Hilbert de l'objet, son foucaultgramme ou l'objet lui-même. De plus, cette lame s'avère constituer un filtre achromatique permettant de réaliser des transformations de Hilbert en lumière blanche {23}. On décrit aussi un "contraste de phase à déphasage quelconque" (et même nul) et l'on montre que, pour observer de petits objets de phase tels que les microdéfauts de surface des pièces optiques, défauts qui sont d'ordinaire observés par contraste de phase, il n'est pas nécessaire d'introduire un déphasage de $\pi/2$ (contraste de phase classique), mais qu'il peut être plus intéressant de ne pas déphaser et d'introduire uniquement une absorption {13}.

Des exemples de telles "lames de phase", à déphasage quelconque, sont donnés ainsi que des résultats expérimentaux.

Enfin, le chapitre 7 traite d'une méthode de soustraction de luminance qui est basée sur l'utilisation des prismes biréfringents {32}{23}.

Le principe de la méthode consiste à enregistrer sur une même plaque photographique (ou tout autre récepteur photosensible), et à moduler par des réseaux complémentaires, les deux images que l'on souhaite soustraire. On obtient ainsi un hologramme-image de la différence des deux objets originaux, hologramme que l'on restitue dans un montage de filtrage des fréquences spatiales de façon à ne conserver qu'un des ordres diffractés. On décrit deux montages d'enregistrement dont l'un, utilisant un prisme

...

de Wollaston, est plus particulièrement adapté aux objets par transmission. L'autre fait appel à un prisme de Savart et peut fonctionner en lumière spatialement incohérente. On étudie ensuite la dimension optimale à donner à la pupille du système optique utilisé lors de l'enregistrement pour que la restitution puisse avoir lieu avec une source présentant une certaine largeur, c'est-à-dire partiellement cohérente.

Le dernier chapitre est consacré aux conclusions et perspectives d'avenir.

CHAPITRE 1

LA TRANSFORMEE DE HILBERT EN OPTIQUE

1 - INTRODUCTION

Dans le présent chapitre, nous définirons mathématiquement la transformée de Hilbert d'une fonction et montrerons qu'elle permet de visualiser de faibles déphasages.

Nous montrons ensuite que le théorème de réduction établi par LINFOOT[12] dans le cas de la méthode de Foucault est général et s'applique à tous les montages de filtrage des fréquences spatiales pour lesquels on utilise un filtre unidimensionnel placé dans le plan spectral. D'après ce théorème , il est légitime, dès qu'on peut négliger la dimension finie du plan spectral du système (ce qui est le cas pour les objets de basses fréquences)d'effectuer des calculs à une dimension. Cette remarque permettra d'alléger considérablement la suite des calculs.

2 - LA TRANSFORMEE DE HILBERT

2.1. Définition de la transformée de Hilbert

La transformée de Hilbert d'une fonction f(x) d'une variable x est définie mathématiquement par :

$$f_h(x) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y - x)}{y} \, dy \qquad (1\text{-}1)$$

v,p signifiant valeur principale au sens Cauchy.

...

L'expression (1-1) peut encore s'écrire, au sens des distributions :

$$f_h(x) = -\frac{1}{\pi} f(x) * \frac{1}{x}$$

où * signifie produit de convolution.

Un tel produit de convolution peut être effectué d'une façon très simple en utilisant un montage à double diffraction en optique cohérente (fig. 1-1)

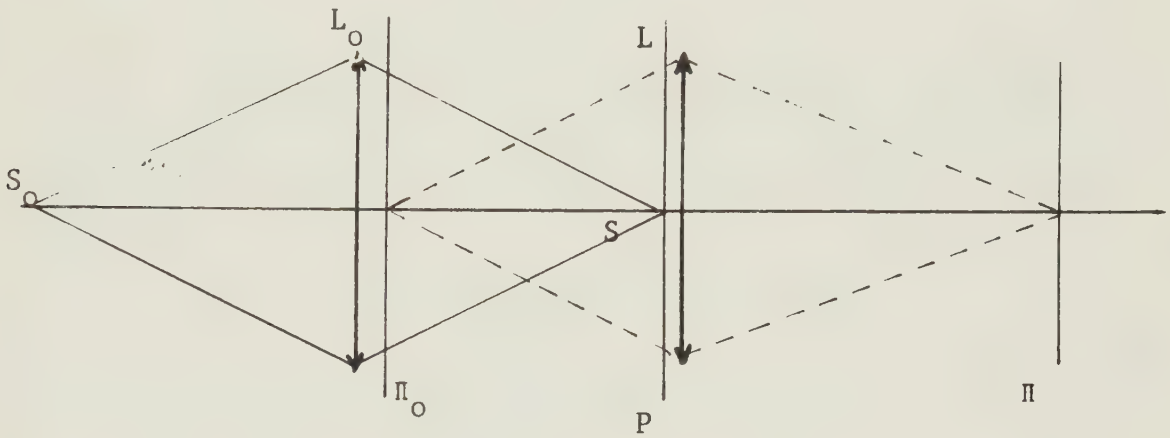


Figure 1-1

Un objectif L_o forme en S l'image d'une source ponctuelle S_o. Le plan P perpendiculaire à l'axe du système en S est le plan spectral. Un deuxième objectif L forme en Π l'image du plan objet Π_o.

Si la fonction f(x) à traiter est introduite dans le plan Π_o (par exemple sous forme d'un transparent photographique de transmittance en amplitude f(x)) on obtient dans le plan P la transformée de Fourier ou spectre F (u) de l'objet f(x).

En l'absence de filtre, une deuxième diffraction donne dans le plan Π l'image de f(x) qui est parfaitement identique à l'objet, si l'on néglige la limitation de bande passante due à la monture finie de l'objectif L.

...

Pour obtenir en Π la transformée de Hilbert de l'objet f(x) il suffit, le filtrage optique étant un filtrage linéaire, de placer dans le plan spectral P un filtre dont la réponse percussionnelle est 1/x, c'est-à-dire un filtre dont la transparence est la transformée de Fourier de 1/x, puisque cette transformation est réciproque. Un tel filtre existe et il a pour transmittance en amplitude :

$$H(u) = i\ \mathrm{sgn}(u) \qquad (1\text{-}2)$$

avec

$$\mathrm{sgn}(u) = +1 \text{ pour } u > 0$$
$$= -1 \text{ pour } u < 0$$

On peut aussi exprimer la fonction sgn (u) en utilisant l'échelon unité de Heavyside Γ (u) dont on connaît la transformée de Fourier et qui fournit deux relations qui nous seront utiles par la suite :

$$\Gamma(u) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2}\left[\ \delta(x) - \frac{i}{\pi x}\ \right]$$
$$\Gamma(-u) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2}\left[\ \delta(x) + \frac{i}{\pi x}\ \right] \qquad (1\text{-}3)$$

où δ (x) représente la mesure de Dirac, et l'on a bien :

$$\mathrm{sgn}\ (u) = -\Gamma(-u) + \Gamma(u) \xrightarrow{TF} -\frac{i}{\pi x}$$

On peut remarquer que la réalisation de la transformée de Hilbert étant un filtrage linéaire, toutes les propriétés connues du filtrage linéaire sont applicables. En particulier, comme le gain du filtre est de module unitaire, toute l'énergie se retrouve dans la filtrée. En effet, si f(x) a pour transformée de Fourier F(u) et pour transformée de Hilbert $f_H(x)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f_h\ (x)\right|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F(u)\ \mathrm{sgn}\ (u)\right|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \qquad (1\text{-}4)$$

...

On voit donc, que contrairement aux méthodes de Foucault, de strioscopie ou de contraste de phase, où une partie de l'énergie est absorbée, la totalité de l'énergie incidente sert ici à former l'image.

2.2. La transformée de Hilbert permet de visualiser de faibles déphasages

Montrons, sur un premier exemple, de quelle façon la T.H. permet de visualiser de faibles déphasages.

Soit f(x) un objet constitué par une faible variation sinusoïdale de phase.

$$f(x) = e^{ia \cos \frac{2\pi x}{p}} \text{ rect } \frac{x}{D}$$

avec $a << 1$.

Un tel objet s'écrit en négligeant des termes d'ordre supérieur :

$$f(x) = (1 + ia\cos \frac{2\pi x}{p}) \text{ rect } \frac{x}{D}$$

dont on peut montrer que la transformée de Hilbert est :

$$f_h(x) = - ia\sin \frac{2\pi x}{p} + \frac{1}{\pi} \text{ Log } \left| \frac{x + \frac{D}{2}}{x - \frac{D}{2}} \right| \qquad (1\text{-}5)$$

D représentant la largeur du champ objet, c'est-à-dire en fait le diamètre de la lentille L_o de la figure 1-1.

Mis à part le cas des points situés au voisinage immédiat de

$$x = \pm \frac{D}{2}$$

le dernier terme de (1-5) est en général négligeable, et l'éclairement observé dans le plan Π est :

$$E(x) = a^2 \sin^2 \frac{2\pi x}{p} \qquad (1\text{-}6)$$

La sinusoïde de phase a été transformée en sinusoïde d'amplitude : la réalisation optique de la transformée de Hilbert a donc permis de "visualiser" l'objet de phase sinusoïdal.

...

Il est à remarquer que, si l'on tient compte de l'ouverture limitée de la lentille L, l'amplitude dans le plan Π est la convolution de $f_H(x)$ par la tache de diffraction d(x) de L; on observe alors dans le plan Π une réponse

$$f'_h(x) = f_h(x) * d(x) \qquad (1\text{-}6)$$

Les "pics infinis" correspondant à $x = \pm D/2$ n'existent plus. Pour $x = \pm D/2$, on observe une accumulation de lumière qui est un phénomène classique dans les montages du type montage de Foucault {12}.

2.3. Le théorème de réduction

Avant de traiter le cas d'objets plus complexes que celui du paragraphe précédent, il convient de montrer que, bien que les montages optiques soient bidimensionnels, il est légitime d'effectuer un raisonnement à une dimension. Pour cela, on va voir que le "théorème de réduction" démontré par LINFOOT dans le cas de la méthode de Foucault s'applique pour tout filtre unidimensionnel en particulier au cas de la transformée de Hilbert.

Représentons en perspective (fig. 1-2) le schéma de principe de la figure 1-1, et négligeons la limitation de bande passante due à la monture limitée de la lentille L, c'est à dire que nous supposons cette lentille de dimension infinie.

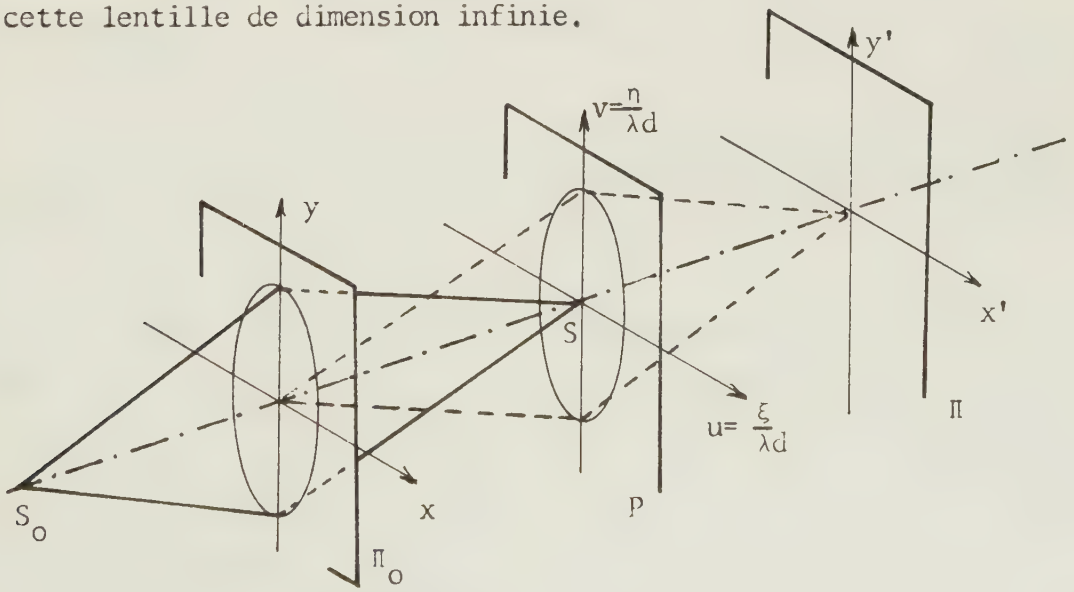


Figure 1-2

...

Soit f(x,y) la fonction objet, le mécanisme de formation de l'image s'écrit :

$$f(x,y) \xrightarrow{TF} F(u,v) \xrightarrow{TF^{-1}} f(x,y) \qquad (1\text{-}7)$$

u et v sont les "fréquences spatiales" dans le plan spectral P, et F(u,v) représente la transformée de Fourier de f(x,y).

Si l'on introduit dans le plan P un filtre unidimensionnel dont la transmittance en amplitude est une fonction de u seul H(u), le schéma (1-7) devient :

$$f(x,y) \xrightarrow{TF} F(u,v) \underbrace{\times H(u)}_{\text{filtre}} \xrightarrow{TF^{-1}} f(x,y) \underset{x,y}{*} h(x)\,\delta(y) = f(x,y) \underset{x}{*} h(x) \qquad (1\text{-}8)$$

La réponse est donc un produit de convolution ne portant que sur la variable x (y devient un paramètre).

Ceci constitue le théorème de réduction qui permet, lorsqu'on utilise des écrans unidimensionnels, de ramener les calculs à des transformations de Fourier à une seule dimension.

La réponse obtenue dans le plan x'y' s'écrit :

$$r(x',y') = \int_{-\infty}^{\infty} F(u,y')\ e^{i2\pi ux'}\ du \qquad (1\text{-}9)$$

avec

$$F(u,y') = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y')\ e^{i2\pi ux}\ dx \qquad (1\text{-}10)$$

On voit donc que la valeur de la réponse r ne dépend que de la valeur de la fonction f sur une parallèle à l'axe des x d'ordonnée y.

Dans le cas particulier de la transformée de Hilbert, le filtre

$$H(u) = \Gamma(u) - \Gamma(-u) \qquad (1\text{-}11)$$

conduit à une réponse :

...

$$r(x',y') = \int_{0}^{+\infty} F(u,y')\, e^{i2\pi ux'}\, du - \int_{-\infty}^{0} F(u,y')\, e^{i2\pi ux'}\, du \qquad (1\text{-}12)$$

Nous avons supposé que le plan spectral P n'était pas limité. Cette approximation est en général légitime, mais peut conduire à des impossibilités physiques (éclairements infinis) lorsqu'on considére des points situés sur les bords du champ-objet délimité par le diaphragme qui limite le plan Π_o de la figure 1-2. Lorsqu'un tel cas se présente, on peut toujours supposer que le plan spectral est en fait limité par une fente de largeur a, disposée parallèlement à l'axe v (figure 1-3).

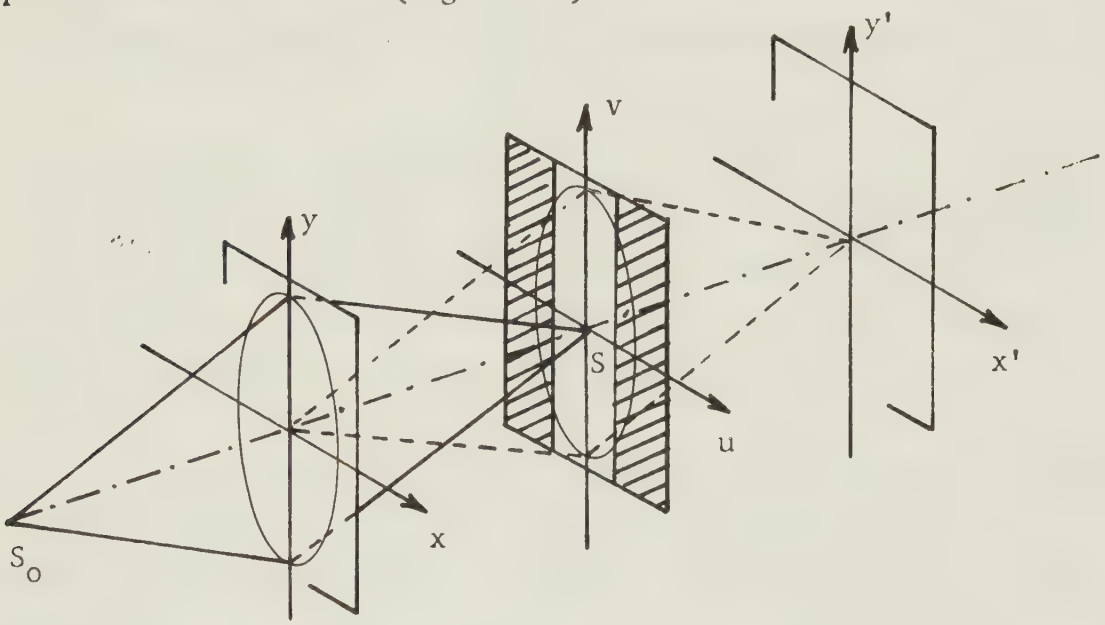


Figure 1-3

On peut alors refaire la même démonstration en remplaçant H(u) par :

$$H'(u) = H(u) \cdot \text{rect}\, \frac{u}{u_o} \qquad (1\text{-}13)$$

où $\begin{cases} \text{rect}\, \frac{u}{u_o} = 1 & \text{pour } |u| < \frac{u_o}{2} \quad (u_o = \frac{a}{\lambda d}) \\ = 0 & \text{pour } |u| > \frac{u_o}{2} \end{cases}$

...

La réponse est alors

$$r'(x',y') = r(r',y') * b(x') \qquad (1\text{-}14)$$

où

$$b(x') = TF^{-1}\left[\text{rect}\,\frac{u}{u_o}\right]$$

Nous allons pouvoir maintenant appliquer ces résultats à l'étude des dispositifs de réalisation de la transformée de Hilbert.

2.4. Transformée de Hilbert d'un objet de transmittance uniforme

Ce cas est important car en fait il montre quelle est la limite supérieure de la "lumière parasite" due à la diffraction que l'on aura dans le champ lors de l'observation d'un objet quelconque, et l'on verra que cette "lumière parasite" amène une limitation importante à la sensibilité de la méthode, limitation à laquelle on peut apporter un remède partiel grâce à la soustraction.

Ici, l'objet peut être l'ouverture du diaphragme D limitant l'onde spérique provenant de la lentille L_o, ce peut être aussi la monture d'un miroir sphérique parfait, au centre de courbure duquel est placée la source S_o. On obtiendra la limite supérieure de la lumière parasite, car lorsqu'un objet de phase est introduit dans l'ouverture de ce diaphragme, l'énergie, dans son image, est prélevée sur le voile en vertu du théorème de conservation de l'énergie (exp. 1-4)

Dans le cas d'un diaphragme circulaire (fig. 1-4)

$$f(x) = \text{rect}\,\frac{x}{D}$$

avec

$$D = 2\sqrt{\frac{Do^2}{4} - y^2}$$

...

Pour un autre forme d'objet, D sera une certaine fonction de y, mais les calculs que nous allons faire resteront les mêmes.

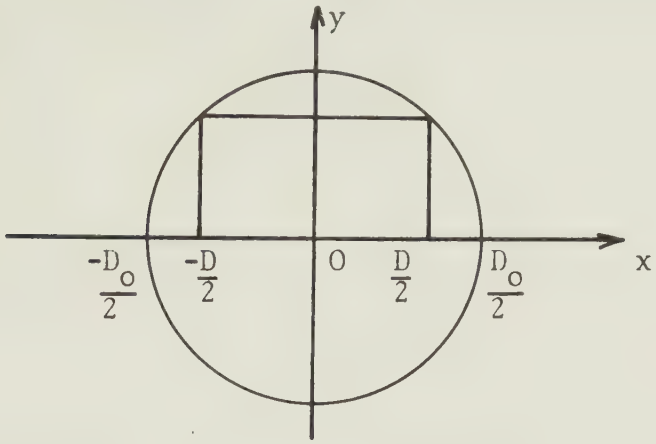


Figure 1-4

Soit f(x) = rect x/D la fonction objet que nous supposerons centrée sur x = 0, car la transformation de Hilbert étant linéaire et homogène, une translation de l'objet conduit à une simple translation de l'image.

La réponse dans le plan Π est :

$$R_1(x) = i \left\{ \text{rect} \frac{x}{D} * \left(- \frac{1}{\Pi x} \right) \right\} * \frac{\sin px}{px} \qquad (1\text{-}15)$$

où

$$p = \frac{\Pi a}{\lambda d}$$

Le produit de convolution étant commutatif et la transformée de Hilbert de $\frac{\sin px}{px}$ étant connue {16} (1-15) s'écrit :

$$R_1(x) = \frac{i}{\Pi} \text{rect} \frac{x}{D} * \frac{\cos px - 1}{px}$$

qui après intégration, conduit à :

$$R_1(x) = \frac{i}{\Pi} \left\{ \text{Log} \left| \frac{x + \frac{D}{2}}{x - \frac{D}{2}} \right| - \text{Ci}\left[p \left| x + \frac{D}{2} \right| \right] + \text{Ci}\left[p \left| x - \frac{D}{2} \right| \right] \right\} \qquad (1\text{-}16)$$

où Ci(x) représente le cosinus intégral de x défini pour x>0 par :

$$\text{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} \, dt$$

...

On retrouve un résultat classique {7} qui, lorsqu'on ne tient pas compte des cosinus intégraux généralement négligeables dès que x s'éloigne de $\pm$ D/2, se réduit à :

$$R_1(x) = \frac{i}{\Pi} \text{Log} \left| \frac{x + \frac{D}{2}}{x - \frac{D}{2}} \right|$$

L'éclairement dans le plan Π est alors :

$$E(x) = \frac{-}{\Pi}{}_2 \text{Log}^2 \left| \frac{x + \frac{D}{2}}{x - \frac{D}{2}} \right| \qquad (1\text{-}17)$$

Lorsque x tend vers D/2, le développement en série de Ci(x) au voisinage de zéro permet d'écrire

$$R_1(x) = \left\{ \frac{i}{\Pi} \text{Log}\left(p \left| x + \frac{D}{2} \right| \right) + \gamma \right\} \qquad (1\text{-}18)$$

où γ est la constante d'Euler.

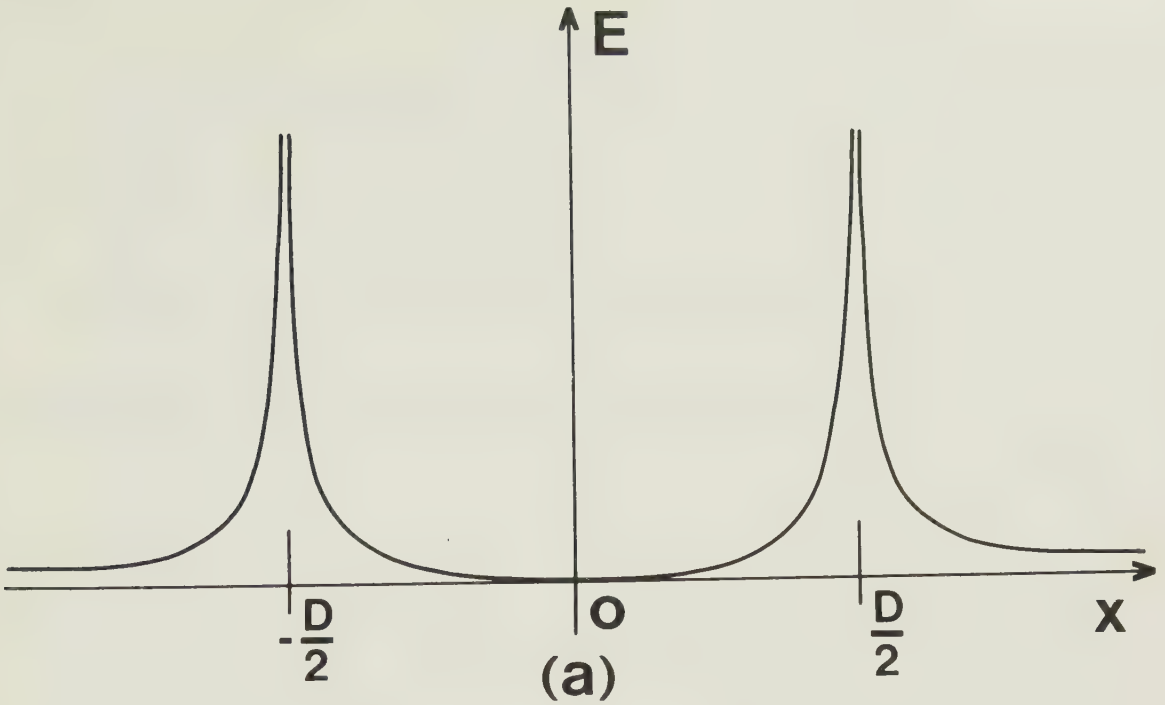
Cas particulier, L'objet circulaire parfaitement transparent

Il suffit de faire, dans (1-17), $D = \sqrt{D_o^2/4 - y^2}$; on constate que les isophotes sont des courbes telles que :

$$x + \sqrt{\frac{Do^2}{4} - y^2} = k \left[x - \sqrt{\frac{Do^2}{4} - y^2} \right]$$

Ce sont des ellipses d'axe Oy. On retrouve, à une constante additive près, le résultat obtenu par LINFOOT {12} dans le cas de la méthode de Foucault. On a représenté sur la figure 1-5 l'éclairement obtenu dans le cas d'un objectif (ou d'un miroir) parfait observé par transformation de Hilbert (fig. 1-5a) et par la méthode de Foucault (fig. 1-5b)

...



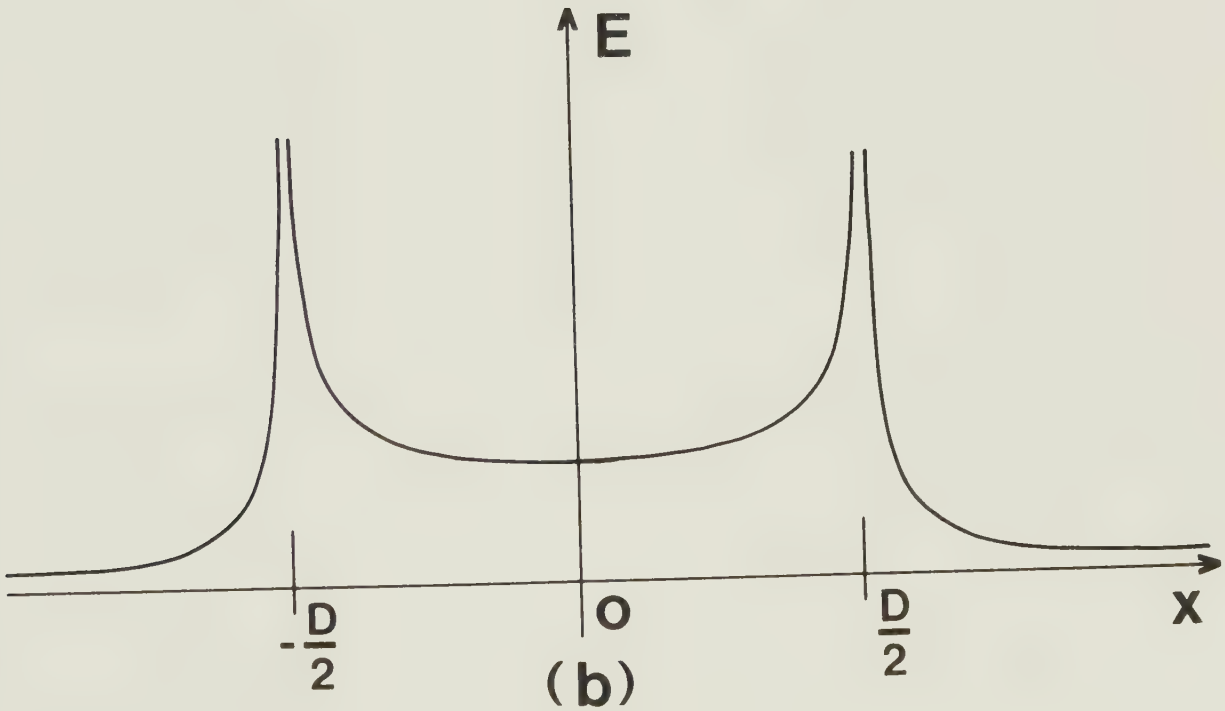


Figure 1-5

CHAPITRE 2

REALISATION PRATIQUE DE LA TRANSFORMATION DE HILBERT

TRANSFORMEE DE HILBERT - TRANSFORMEE DE HIBERT MIXTE

Dans la pratique, les couteaux de phase utilisés ne sont pas parfaits. Ils sont en général obtenus par dépot sous vide d'une couche diélectrique, dont l'épaisseur est ajustée de telle sorte que le déphasage soit π pour la longueur d'onde de travail, et telle que l'absorption soit faible. Avec de tels couteaux, le bord de la plage déphasante n'est jamais parfaitement net, il se produit, lors de la fabrication, des phénomènes de pénombre et de rebondissement au voisinage du masque disposé dans la cloche à vide. Parfois, pour des épaisseurs importantes, la couche se craquelle. La figure 2-1 montre la microphotographie d'une des premières couches que nous avons obtenues et qui, de toute évidence, était inutilisable. Nous verrons au chapitre 6 qu'il est possible de réaliser des couteaux de façons différentes.

Si même, nous supposons l'arête du couteau parfaitement fine et rectiligne, celle-ci ne coupe pas toujours exactement la figure de diffraction en son milieu, de plus, la source d'éclairage utilisée qui est une fente parallèle à l'arête du couteau, présente une certaine largeur.

D'autre part, le déphasage n'est pas toujours exactement égal à π et la plage déphasante peut présenter une certaine absorption. Dans ce dernier cas on obtient une "transformée de Hilbert mixte" qui présente certains avantages en ce qui concerne la visualisation d'objets de phase comme nous le verrons au chapitre 3.

...

Figure 2-1

Nous allons dans le présent chapitre étudier l'influence des différents paramètres que nous venons de citer.

1 - EXPRESSION GENERALE DE LA REPONSE FOURNIE PAR UN FILTRE DE PHASE

Nous considérons ici le cas tout à fait général d'un filtre constitué de deux plages juxtaposées n'ayant pas la même épaisseur optique et ne présentant pas la même absorption. Soit $\tau \exp(i\theta)$ la transmittance complexe de l'une des plages par rapport à l'autre. Un tel filtre, utilisé comme couteau de phase présente une transmittance

$$H(u) = \tau e^{i\theta} \Gamma(-u + u_o) + \Gamma(u - u_o)$$

où u_o fixe la position de la ligne de séparation des plages dans le plan spectral. Dans ce cas, les expressions (1-3) deviennent :

$$\Gamma(u-u_o) \xrightarrow{TF} \frac{e^{-i2\pi u_o x}}{2} \left\{ \delta(x) - \frac{i}{\pi x} \right\} \qquad (2\text{-}1)$$

$$\Gamma(-u + u_o) \xrightarrow{TF} \frac{e^{-i2\pi u_o x}}{2} \left\{ \delta(x) + \frac{i}{\pi x} \right\}$$

La réponse percussionnelle du filtre est alors

$$r(x) = \frac{e^{-i2\pi u_o x}}{2} \left\{ \left(1 + \tau e^{i\theta}\right) \delta(x) - \frac{i}{\pi x} \left(1 - \tau e^{i\theta}\right) \right\} \qquad (2\text{-}2)$$

Si un tel filtre est utilisé pour traiter une fonction objet $f(x)$, la réponse du système est :

$$R(x) = f(x) * r(x) \qquad (2\text{-}3)$$

ou encore, si l'on veut tenir compte de la bande passante limitée (c'est à dire lorsqu'on considère un objet de hautes fréquences)

$$R'(x) = f(x) * r(x) * d(x)$$

On peut remarquer que l'expression (2-2) recouvre tous les cas possibles de montages à couteau suivant les valeurs de θ et τ, en particulier

pupille libre :

$$\theta = 0 \qquad \tau = 1$$

...

contraste de phase :

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2} \qquad \tau \leqslant 1$$

transformée de Hilbert :

$$\theta = \pi \qquad \tau = 1 \qquad u_o = 0,$$

méthode de Foucault :

$$\tau = 0.$$

L'expression 2-2 va nous permettre d'étudier, en ce qui concerne la transformée de Hilbert, quelles sont les influences :

- d'un déphasage légèrement différent de π
- d'une absorption de la plage déphasante,
- d'un décentrement du filtre dans le spectre de l'objet.

Ce dernier point nous permettra d'étudier l'influence de la largeur de la source d'éclairage.

2 - INFLUENCE DE L'ABSORPTION

On suppose que l'une des deux plages du filtre présente un déphasage π et une absorption ε c'est-à-dire une transmittance $\tau = 1 - \varepsilon$ la réponse percussionnelle devient

$$r(x) = \frac{1}{2}\left\{ \varepsilon\ \delta(x) - \frac{i}{\pi x} \quad (2 - \varepsilon) \right\} \qquad (2\text{-}4)$$

d'où la réponse pour une fonction $f(x)$

$$R(x) = \frac{1}{2}\left\{ \varepsilon\ f(x) + i\ (2 - \varepsilon)\ f_h\ (x) \right\}$$

où $f_H(x)$ représente la transformée de Hilbert de $f(x)$.

On observe alors dans le plan image, un éclairement

$$E(x) = \frac{1}{4}\left\{ \varepsilon^2 \left|f(x)\right|^2 + (2-\varepsilon)^2 \left|f_h(x)\right|^2 + 2\mathrm{Re}\left[i\varepsilon(2-\varepsilon)\ f(x) f_h(x) \right] \right\} \qquad (2\text{-}5)$$

qui prend naturellement la valeur $\left| f_H(x) \right|^2$ lorsque $\varepsilon = 0$.

...

Si la fonction f(x) est paire ou impaire, réelle ou imaginaire pure, l'éclairement observé dans la transformée de Hilbert $E = \left| f_H(x) \right|^2$ est alors symétrique par rapport à x = 0 et cette symétrie n'est pas affectée par une absorption de l'une des plages du filtre, même lorsque cette absorption devient totale (méthode de Foucault avec couteau centré).

Dans le cas de l'objet parfaitement transparent (§ 2-4 chapitre 1) l'éclairement obtenu sera représenté par une courbe intermédiaire entre les courbes a) et b) de la figure 1-5, l'éclairement ne sera plus nul au centre du champ, mais la présence d'une telle absorption sera très difficilement perceptible à l'oeil ou même à l'aide de mesures photométriques, car elle pourra être confondue avec un voile de lumière parasite.

Les éclairements à l'intérieur et à l'extérieur de l'image géométrique sont respectivement

$$E_{int} = \frac{1}{4} \left[\varepsilon^2 + (2-\varepsilon)^2 \left| R_1(x) \right|^2 \right]$$

$$E_{ext} = \frac{1}{4} (2-\varepsilon)^2 \left| R_1(x) \right|^2 \qquad (2\text{-}6)$$

où $R_1(x)$ est la réponse théorique (1-16)

$$R_1(x) = \frac{i}{\pi} \left\{ \mathrm{Log} \left| \frac{x + \frac{D}{2}}{x - \frac{D}{2}} \right| - \mathrm{Ci}\left(p \left| x + \frac{D}{2} \right| \right) + \mathrm{Ci}\left(p \left| x - \frac{D}{2} \right| \right) \right\} \qquad (2\text{-}7)$$

Nous verrons au chapitre 3 que l'usage d'un filtre présentant une plage légèrement absorbante peut s'avérer intéressant car il ajoute dans l'image un fond cohérent. Nous dirons, par convention, qu'en tel filtre permet la réalisation de la "transformée de Hilbert mixte".

...

3 - INFLUENCE D'UNE ERREUR DE DEPHASAGE

Si le déphasage diffère légèrement de π, on pose $\theta = \pi - \alpha$ et l'on peut écrire la réponse percussionnelle (2-2) sous la forme

$$r(x) = \frac{1}{2}\left[\left(1 - e^{-i\alpha}\right)\delta(x) - \frac{i}{\pi x}\left(1 + e^{-i\alpha}\right)\right]$$
$$\simeq \frac{1}{2}\left(i\alpha\,\delta(x) - \frac{i}{\pi x}(2 - i\alpha)\right)$$

qui conduit, pour une fonction $f(x)$, à la réponse

$$R(x) = \frac{1}{2}\left(i\alpha f(x) - i(2-i\alpha)\, f_h(x)\right)$$

et l'éclairement observé dans le plan image est

$$E(x) = \frac{1}{4}\left(\alpha^2 ff^* + (4+\alpha^2) f_h f_h^* - 2R_e\left[\alpha(2+i\alpha)\, ff_h^*\right]\right) \qquad (2\text{-}8)$$

Lorsque $f(x)$ est paire ou impaire, réelle ou imaginaire pure, l'éclairement observé pour un déphasage strictement égal à π est symétrique. L'expression 2-8 montre que cette symétrie disparait lorsque le déphasage diffère de π. En effet, le terme dont on prend la partie réelle est alors impair et non imaginaire pur, car ff_H^* est impair. On constate donc que, dans le cas de l'objet circulaire parfait considéré au chapitre 1, l'image ne sera plus symétrique.

Les éclairements observés à l'intérieur et à l'extérieur de l'image géométrique seront respectivement

$$E_{int} = \frac{1}{4}\left(\alpha^2 + (4+\alpha^2)\left|R_1(x)\right|^2 + 2i\alpha^2\, R_1(x)\right)$$
$$E_{ext} = \frac{1}{4}\left((4+\alpha^2)\left|R_1(x)\right|^2\right) \qquad (2\text{-}9)$$

où $R_1(x)$ est encore donné par l'expression (2-7).

...

On peut remarquer que l'éclairement dans le halo situé à l'extérieur de l'image géométrique est pour sa part toujours symétrique.

4 - DECENTREMENT ET LARGEUR DE LA SOURCE

On peut tout d'abord remarquer que, pour des questions de luminosité, dans le montage à double diffraction utilisé, on peut remplacer la source ponctuelle S_o par une fente parallèle à la direction du couteau de phase placé dans le plan spectral. En effet d'après le théorème de réduction, ou l'adaptation que nous en avons faite en considérant le plan spectral limité par une fente très allongée parallèlement à l'axe Oy (fig. 1-3) l'éclairement suivant une droite située à l'ordonnée y et parallèle à Ox (fig. 1-2), ne dépend que de la valeur de la fonction-objet suivant cette droite d'ordonnée y. Si l'on suppose que tous les points de la source sont incohérents, on observe un éclairement qui est la somme des éclairements dûs à chaque petit élément de source. On voit donc que l'on obtient le même résultat que le système soit éclairé avec une source ponctuelle ou avec une source linéaire.

Nous verrons au chapitre 4 comment il est possible de synthétiser une source linéaire de grande luminance.

L'allongement de la source dans une direction parallèle à Oy ne change rien quant aux résultats du filtrage (dans la pratique il faut se limiter à une longueur telle que les aberrations restent négligeables). Nous allons voir quelle est l'influence de la largeur de cette source. Pour cela nous étudierons d'abord l'influence d'un décentrement dans le cas d'une source infiniment mince, une simple intégration nous permettra alors d'étudier l'influence de la largeur de cette source.

...

4.1. Décentrement de la source

On traite le cas d'un système parfait éclairé par une onde homogène (par exemple un miroir parfait travaillant pour son centre).

Reprenant le calcul du § 2-4, chapitre 1, l'équation (1-15) s'écrit, dans le cas d'une onde inclinée d'un angle α (fig. 2-2)

$$R_1(x) = i \left\{ f(x) \text{ rect } \frac{x}{D} * \left(\frac{-1}{\Pi x} \right) \right\} * \frac{\sin px}{px} \qquad (2\text{-}10)$$

où f(x) représente l'onde objet. Ici

$$f(x) = e^{\,i \frac{2\Pi\alpha x}{\lambda}} \qquad (2\text{-}11)$$

α caractérisant l'inclinaison de l'onde, c'est-à-dire en fait la position de la source.

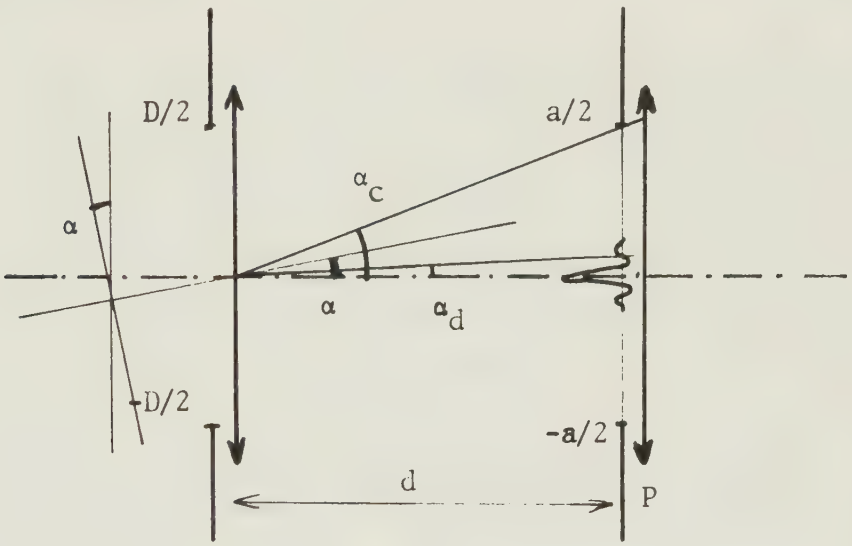


Figure 2-2

Un calcul analogue à celui déjà effectué § 2-4 chapitre 1 conduit à l'expression générale de la réponse

$$R_1(x) = \frac{i}{\Pi} e^{\,i \frac{2\Pi\alpha x}{\lambda}} (C - iS) \qquad (2\text{-}12)$$

avec

$$C = \text{Ci} \frac{\left|\sigma + p\right| \left|x - \frac{D}{2}\right| + \text{Ci} \left|\sigma - p\right| \left|x - \frac{D}{2}\right|}{2}$$

$$- \text{Ci} \frac{\left|\sigma + p\right| \left|x + \frac{D}{2}\right| + \text{Ci} \left|\sigma - p\right| \left|x - \frac{D}{2}\right|}{2}$$

$$+ \text{Ci} \left|\sigma\right| \left|x + \frac{D}{2}\right| - \text{Ci} \left|\sigma\right| \left|x - \frac{D}{2}\right|$$

...

$$S = \frac{Si\ (\sigma+p)\left(x - \frac{D}{2}\right) + Si\ (\sigma- p)\left(x - \frac{D}{2}\right)}{2}$$

$$- \frac{Si\ (\sigma+p)\left(x + \frac{D}{2}\right) + Si\ (\sigma- p)\left(x + \frac{D}{2}\right)}{2}$$

$$+ Si\ \sigma\left(x + \frac{D}{2}\right) - Si\ \sigma\left(x - \frac{D}{2}\right)$$

où, comme précédemment, Si et Ci signifient sinus et cosinus intégraux, et où

$$p = \frac{\pi a}{\lambda d} = \frac{2\pi\alpha_c}{\lambda} \; ; \qquad \sigma = \frac{2\pi\alpha}{\lambda} \tag{2-13}$$

α_c correspondant à l'angle d'inclinaison maximal (angle de coupure) l'éclairement reçu dans le plan d'observation Π est alors :

$$E = \frac{1}{\Pi^2} \left\{ C^2 + S^2 \right\} \tag{2-14}$$

On remarque que S et C sont respectivement des fonctions impaires et paires de x. Par suite E reprend la même valeur lorsqu'on change x en - x, l'éclairement dans le champ est symétrique par rapport à x = 0 comme le montrent les courbes de la figure 2-3 représentant l'éclairement théorique en fonction de la position de la source. (Calculs effectués sur UNIVAC 1108 en collaboration avec S. SLANSKY à la Faculté des Sciences d'Orsay).

Lorsque x tend vers $\pm$ D/2 le terme C prend une valeur indéterminée et doit être remplacé, en utilisant la relation Ci z = log z + γ par :

$$C' = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left| \frac{(\sigma+p)(\sigma-p)}{\sigma^2} \right| - \frac{Ci\ |\sigma+p|\ \left|x + \frac{D}{2}\right| + Ci|\sigma-p|\left|x + \frac{D}{2}\right|}{2}$$

$$+ Ci\ |\sigma|\left|x + \frac{D}{2}\right| \tag{2-15}$$

Lorsque σ tend vers zéro, on retrouve comme amplitude l'expression (1-16) du § 2-4 du chapitre 1.

Lorsque la bande passante n'est pas fortement limitée dans le plan spectral, on a vu qu'on pouvait la considérer comme infinie à condition d'exclure de l'étude les points immédiatement voisins du bord du champ, l'expression (2-12) se simplifie et la réponse devient:

...

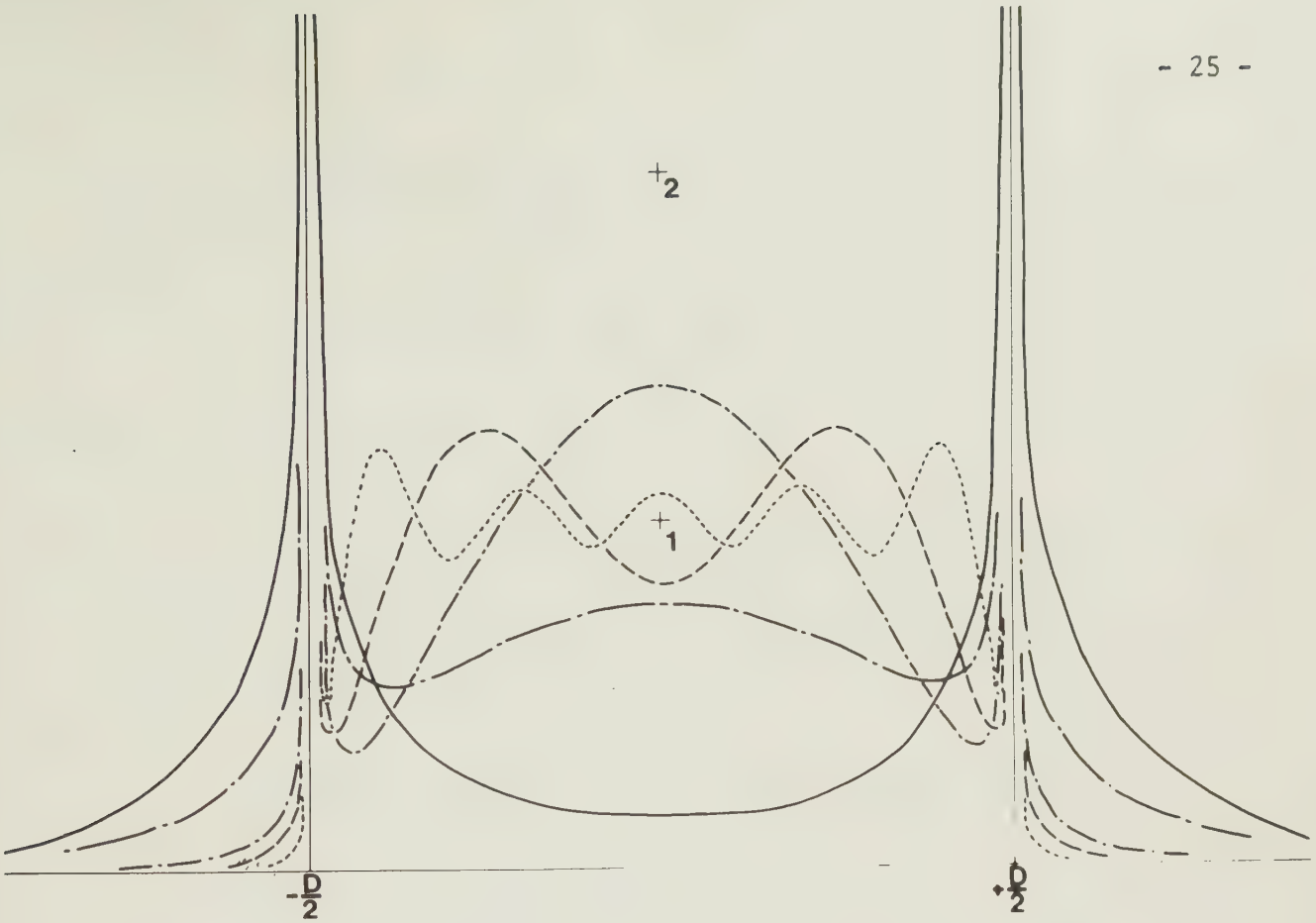


Figure 2-3

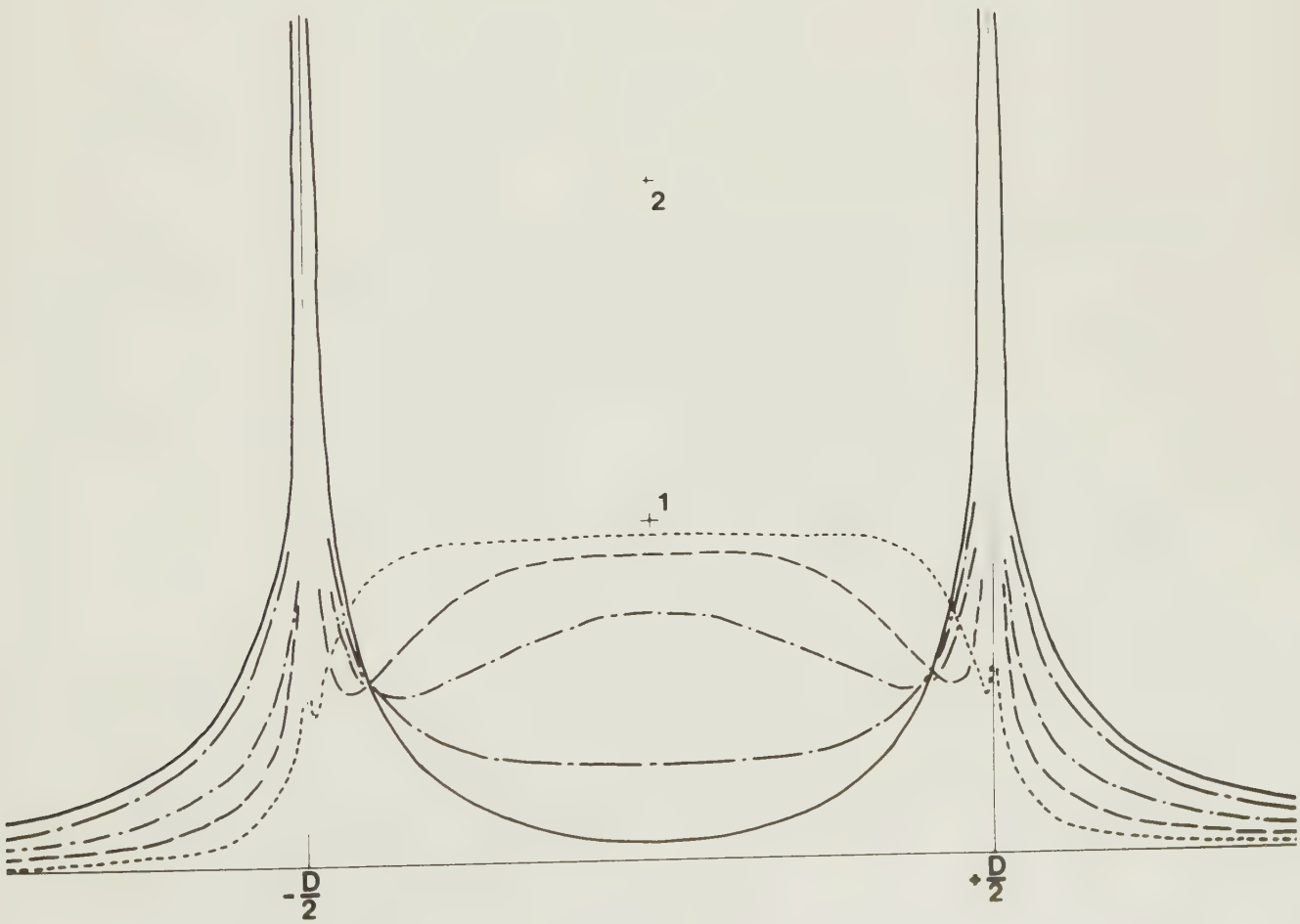


Figure 2-4

$$R_1(x) = \frac{i}{\pi} \; e^{\frac{i2\pi\alpha x}{\lambda}} \left[Ci\,|\sigma|\,\left|x + \frac{D}{2}\right| - Ci\,|\sigma|\,\left|x - \frac{D}{2}\right| \right.$$

$$\left. - i\left\{ Si\,\sigma\left(x + \frac{D}{2}\right) - Si\,\sigma\left(x - \frac{D}{2}\right)\right\}\right] \qquad (2\text{-}16)$$

4.2. Décentrement du couteau

En supposant le plan spectral illimité pour éviter les expressions mathématiques trop lourdes, nous allons calculer directement la réponse obtenue lorsque le filtre est translaté suivant Ox d'une quantité u_o.

La réponse percussionnelle du filtre décentré est d'après (2-2)

$$r(x) = -\frac{i}{\pi} \; e^{-i2\pi u_o x}$$

Pour un objet

$$f(x) = \text{rect}\,\frac{x}{D}$$

où D caractérise la dimension du champ,

$$D = 2\sqrt{\frac{Do^2}{4} - y^2}$$

(voir § 2-4, chapitre 1) dans le cas d'un champ circulaire, on obtient une réponse :

$$R(x) = \frac{-i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\,\frac{x - y}{D} \; e^{-i2\pi u_o y} \; dy \qquad (2\text{-}17)$$

qui par intégration conduit à

$$R(x) = \frac{i}{\pi} \left[Ci\,2\pi u_o \left|x + \frac{D}{2}\right| - Ci\,2\pi u_o \left|x - \frac{D}{2}\right| \right.$$
$$\left. + i\left\{ Si\,2\pi u_o \left(x - \frac{D}{2}\right) - Si\,2\pi u_o \left(x + \frac{D}{2}\right)\right\}\right] \qquad (2\text{-}18)$$

Au facteur exponentiel près (qui disparait lorsqu'on considère les éclairements) cette expression est identique à (2-16). En effet, il est équivalent de translater le filtre par rapport au spectre ou le spectre (centré sur l'image géométrique de la source) par rapport au filtre. Une inclinaison α de l'onde, correspond à une translation du spectre en fréquences spatiales et le remplacement de σ par $2\pi u_o$ dans (2-16) conduit bien à (2-18). La figure 2-3 montre l'éclairement obtenu pour différents enfoncements du couteau de phase.

...

Cas de la méthode de Foucault

Il suffit d'ajouter rect x/D à l'expression (2-18) pour obtenir la réponse dans le cas de la méthode de Foucault. En effet cette réponse est donnée par :

$$R_F(x) = \frac{1}{2} \text{ rect } \frac{x}{D} * e^{-i2\pi u_o x} \quad \delta(x) + \frac{1}{2} \quad R(x)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\text{rect } \frac{x}{D} + R(x) \right]$$

compte tenu de la relation

$$f(x) * g(x) e^{-i2\pi u_o x} = e^{+i2\pi u_o x} \left[f(x) e^{-i2\pi u_o x} * g(x) \right]$$

donc

$$R_F(x) = \frac{1}{2} \text{ rect } \frac{x}{D}$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \left[\text{Ci } 2\pi u_o \left| x + \frac{D}{2} \right| - \text{Ci } 2\pi u_o \left| x - \frac{D}{2} \right| \right. \qquad (2\text{-}19)$$

$$\left. + i \left\{ \text{Si } 2\pi u_o \left(x - \frac{D}{2}\right) - \text{Si } 2\pi u_o \left(x + \frac{D}{2}\right) \right\} \right]$$

qui est l'expression obtenue par LINFOOT {12}

4.3. Source large

Pour calculer l'influence de la largeur de la fente source on peut employer la théorie générale de la cohérence partielle {4}{17} mais il est plus simple d'utiliser les résultats obtenus au paragraphe précédent.

En supposant la fente source éclairée de façon totalement incohérente, on peut, par simple intégration, calculer l'éclairement obtenu pour une fente source de largeur angulaire α_o, l'éclairement dans le plan d'observation est alors donné par :

$$E = \frac{1}{\alpha_o} \int_{-\frac{\alpha_o}{2}}^{\frac{\alpha_o}{2}} E(x, \alpha) \, d\alpha \qquad (2\text{-}20)$$

où E(x, α) est l'expression donnée par (2-14)

...

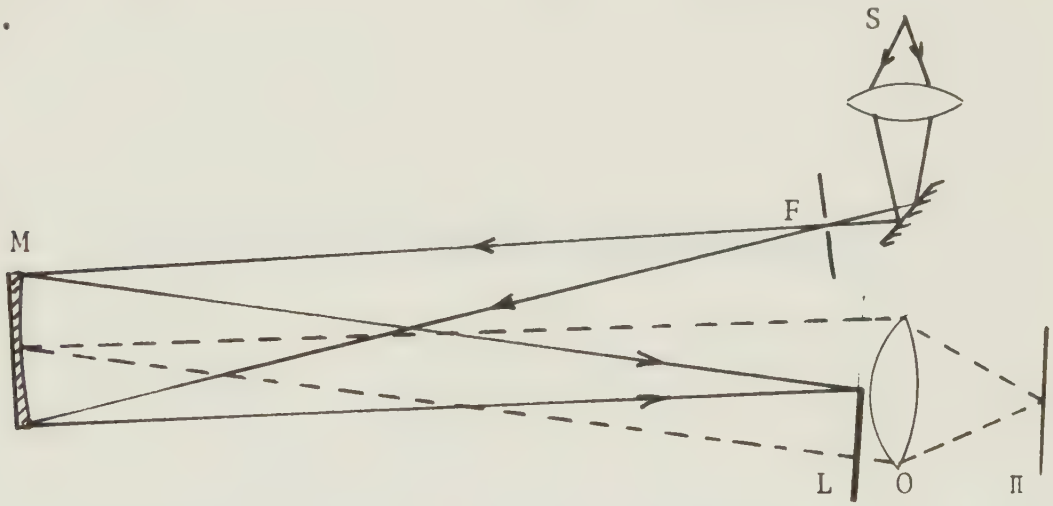
Figure 2-5

Les courbes de la figure 2-4 représentent l'éclairement obtenu pour diverses valeurs de la largeur de la source.

5 - RESULTATS EXPERIMENTAUX

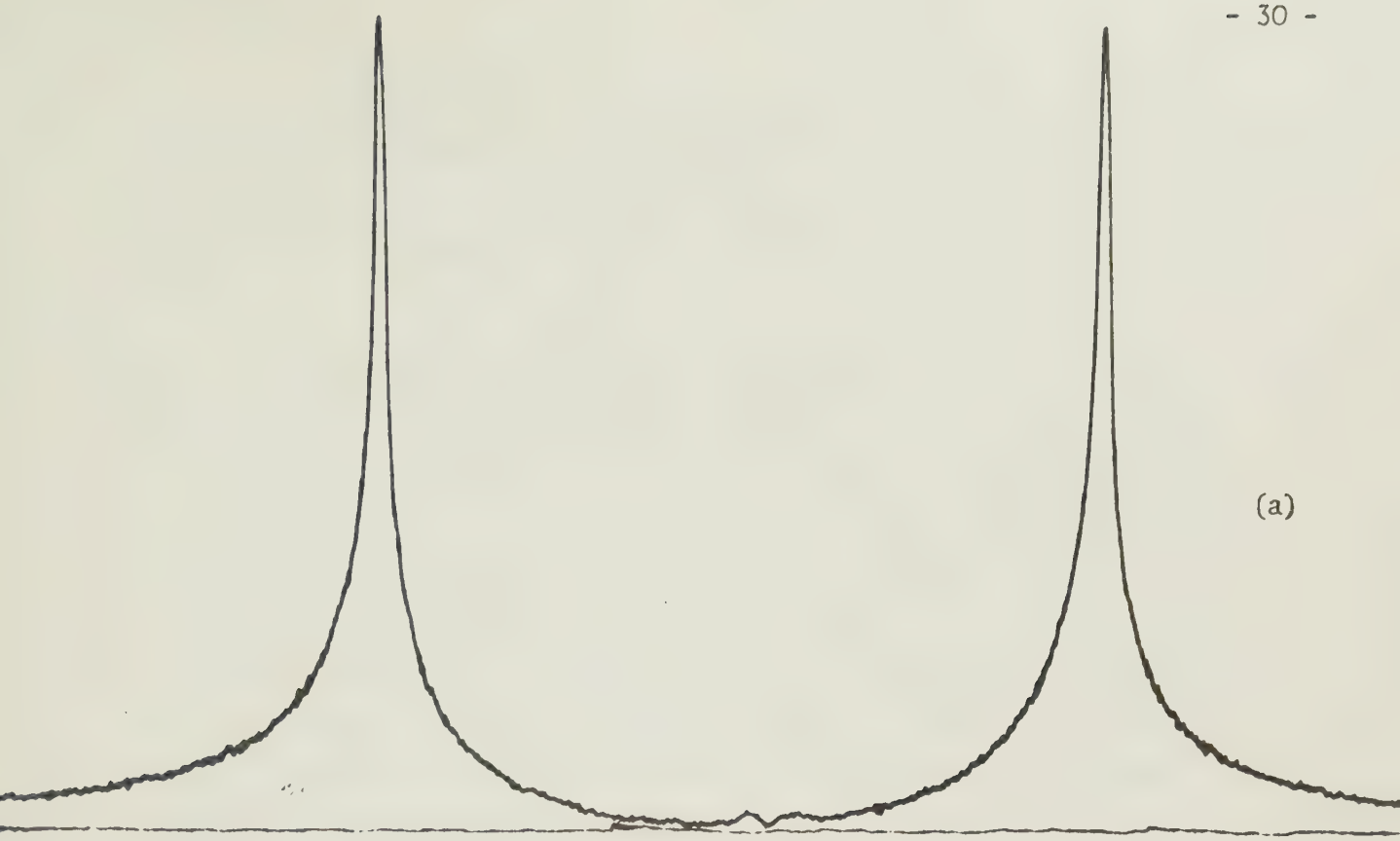
Nous donnerons dans ce paragraphe quelques résultats expérimentaux confirmant l'étude précédente. L'étude expérimentale a été réaliséeà l'aide d'un miroir M très bien poli et travaillant pour un point voisin de son centre.

La source lumineuse était une lampe à vapeur de mercure, éclairant une fente fine F. Un objectif O placé derrière la lame déphasante L formait l'image du miroir dans le plan Π où était disposé soit une plaque photographique, soit un oculaire à fibre de verre relié à un photomultiplicateur et une table traçante qui permettait d'explorer le champ et de mesurer l'éclairement en chaque point.



La figure 2-5 montre la transformée de Hilbert du miroir uniformément éclairé. La figure 2-6 a montre l'enregistrement à l'aide d'un photomultiplicateur de l'éclairement suivant un diamètre horizontal de la figure 2-5. La hauteur des pics est légèrement inférieure à ce que prévoit l'étude théorique, mais ceci est dû, d'une part à l'intégration qu'effectue la fibre de verre dont le diamètre est 72μ et, d'autre part, à la largeur non nulle de la fente utilisée.

...



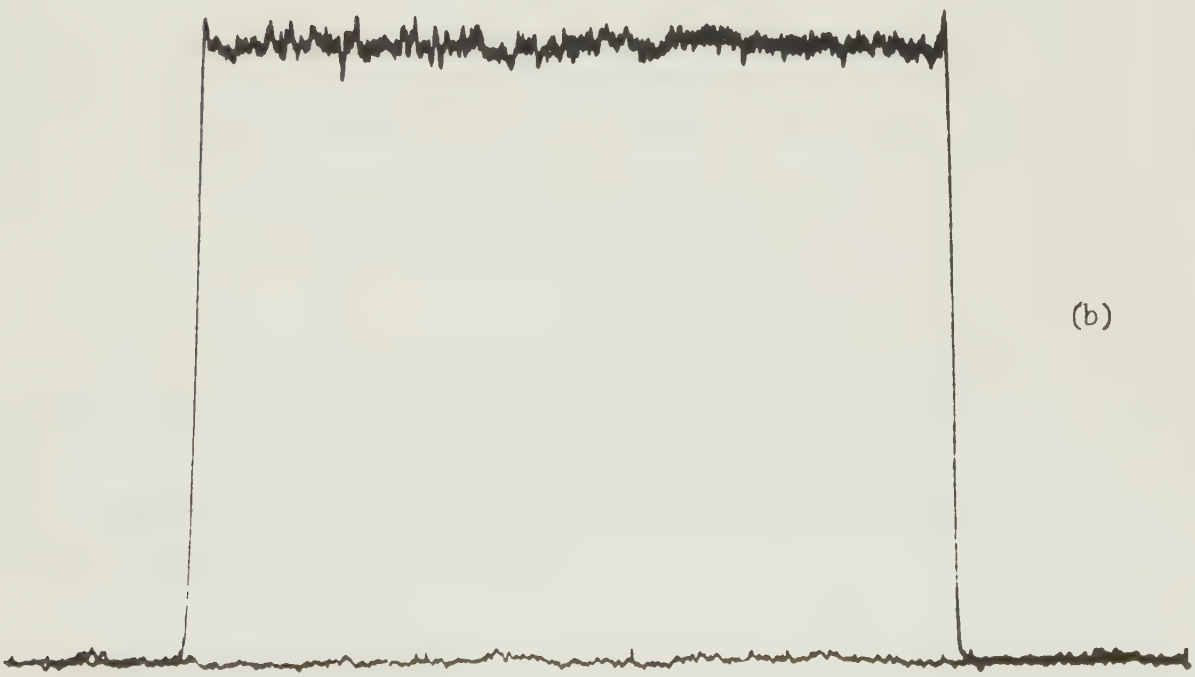


Figure 2-6

La figure 2-6 b correspond à l'éclairement observé en l'absence de lame déphasante (il est en effet très important de vérifier avant toute mesure que le champ est uniformément éclairé car, sinon, les résultats sont sans valeur).

Pour étudier l'influence du déphasage, on a utilisé une lame constituée par un dépôt diélectrique réalisé sous vide et dont l'épaisseur produisait un déphasage inférieur à π. En inclinant plus ou moins la lame, on a pu ainsi réaliser différents déphasages de part et d'autre de la valeur théorique correspondant à la transformée de Hilbert. La figure 2-7 montre les résultats obtenus pour des déphasages variant entre 164 et 185°. On remarque que la dissymétrie change le côté lorsque de déphasage devient supérieur à π. Le résultat obtenu est bien conforme à l'étude théorique et montre que le filtre doit être réalisé de façon précise, une différence de 5° de phase étant nettement perceptible.

Les figures 2-8 et 2-9 confirment les résultats théoriques relatifs à l'influence du décentrement et de la largeur de la source.

La figure 2-8 a correspond au cas d'une source très fine, le couteau étant centré dans le plan spectral. Les figures 2-8 b, c et d montrent les résultats obtenus pour des décentrements du couteau de phase respectivement égaux à 0,2; 1 et 10 fois la demi-largeur de la tache de diffraction dans le plan spectral. Ces résultats sont à comparer aux courbes théoriques de la figure 2-3.

Sur les figures 2-9 a et 2-9 b, on montre l'influence de la largeur de la source pour des largeurs de 0,2 et 0,5 fois la demi-tache de diffraction. On constate que, quand la largeur de la source augmente, le centre de l'image s'éclaire comme le laissent prévoir les courbes de la figure 2-4.

...

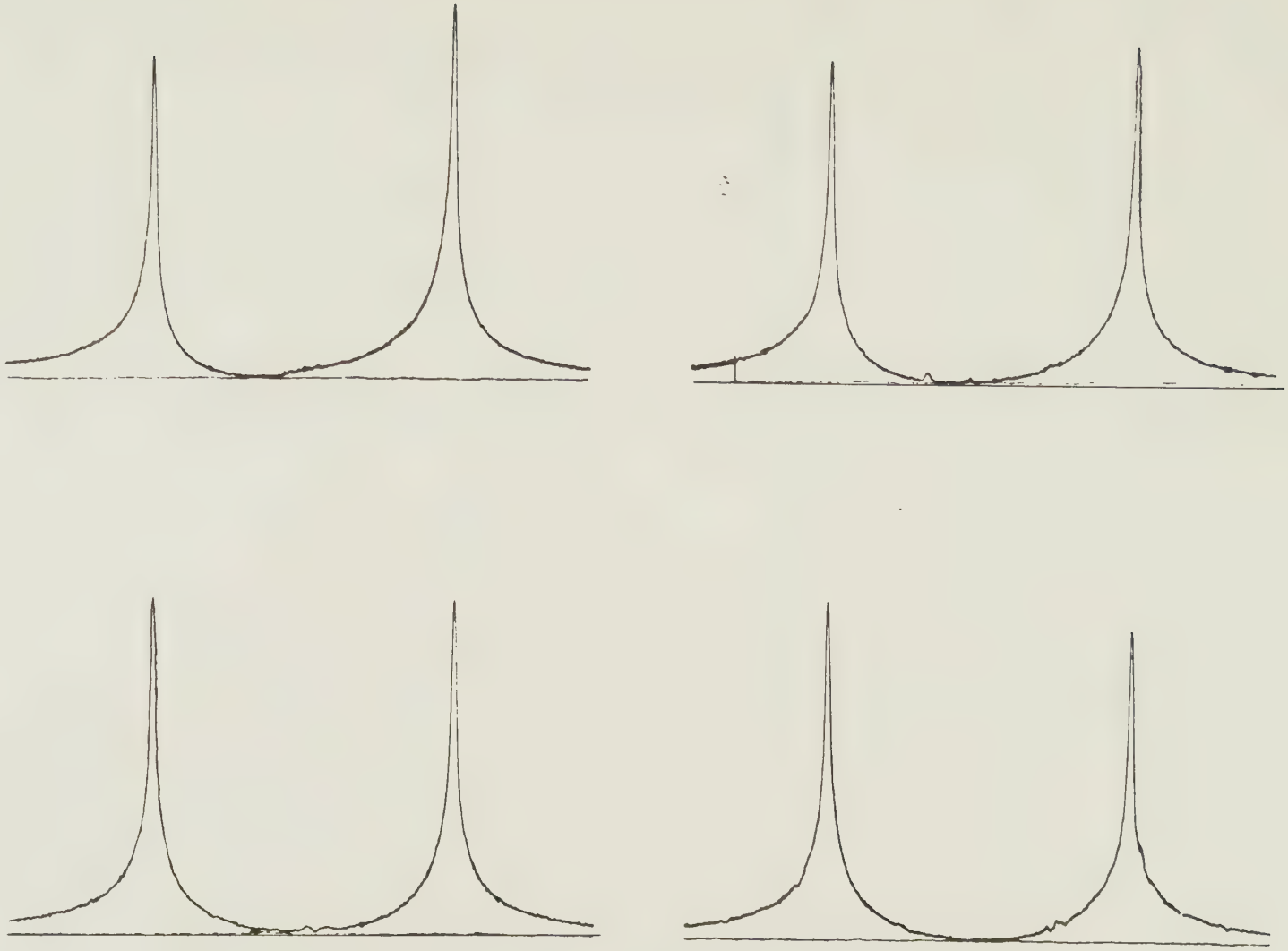


Figure 2-7

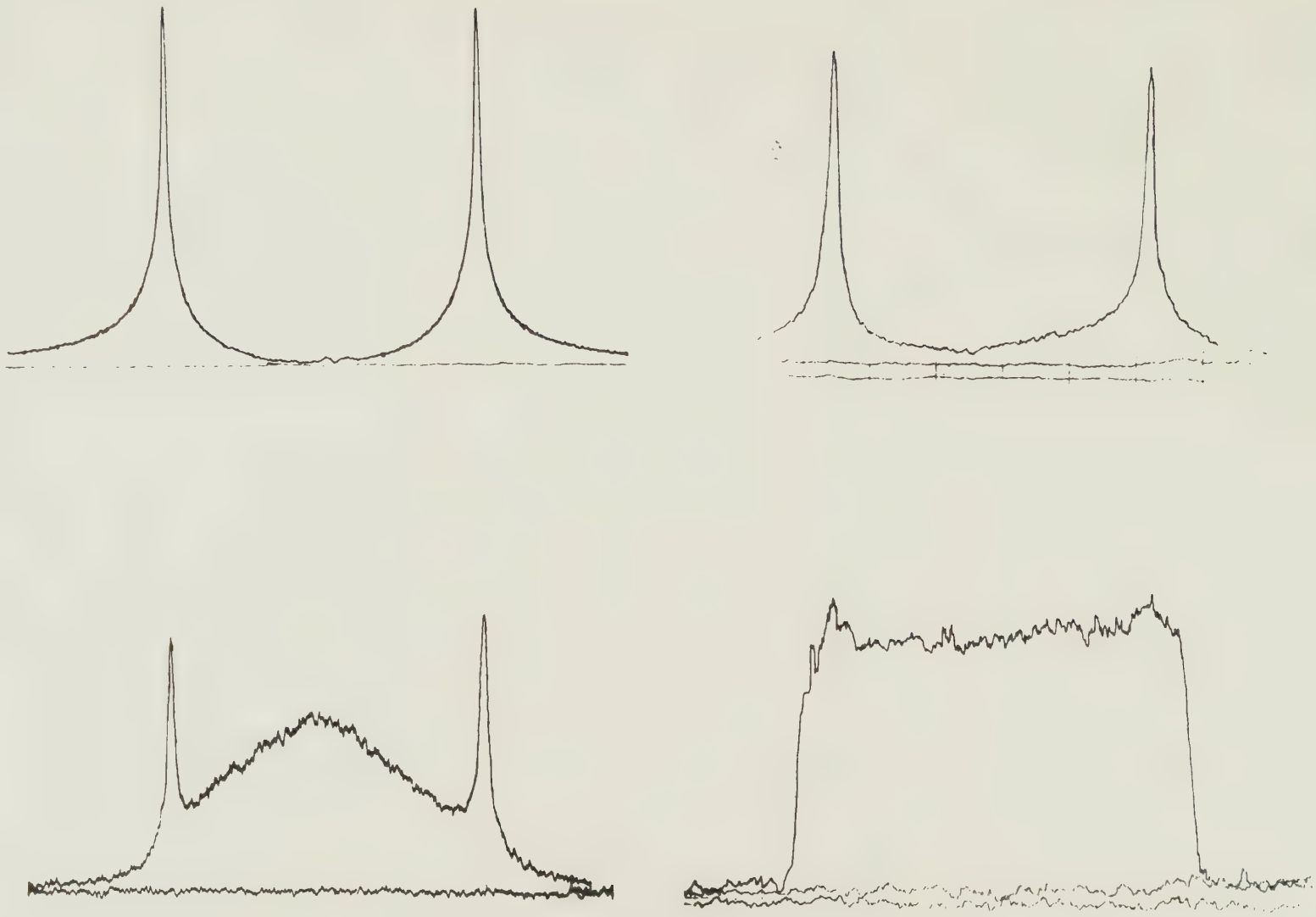


Figure 2-8

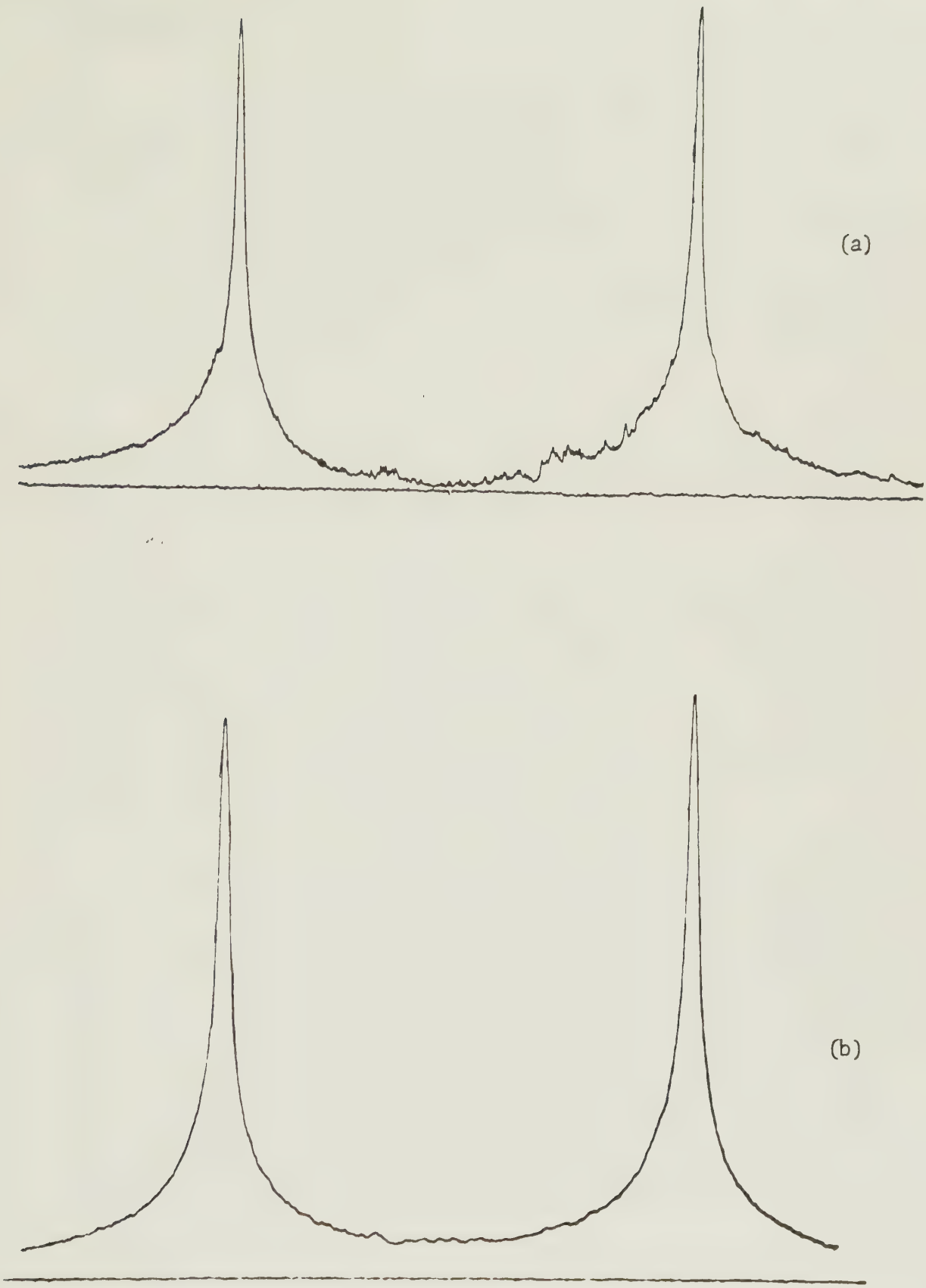


Figure 2-9

6 - CONCLUSION

On s'est attaché dans le présent chapitre à étudier l'influence des différents paramètres pouvant modifier les résultats théoriques. En effet,il n'est pas possible, dans la pratique, de réaliser par exemple des filtres qui déphasent exactement de 180°. On a ainsi pu voir que, si le déphasage devait être réalisé avec précision, une légère absorption n'était pas gênante et nous verrons au chapitre 3 qu'elle peut même être utilisée de façon à améliorer la sensibilité de la méthode.

On a ensuite étudié l'influence de la position du filtre et de la largeur de la source de lumière. Les résultats expérimentaux obtenus confirment les prévisions théoriques.

Cette étude montre qu'il n'est pas possible d'utiliser une source large car alors, les "images" obtenues ont tendance à s'empâter en masquant les phénomènes que l'on veut observer. Il apparaît donc que l'on sera confronté à des problèmes de luminosité, ce qui nous conduira à mettre au point un filtre utilisable en lumière blanche ainsi qu'un dispositif permettant de synthétiser une source linéaire spatialement incohérente à partir d'un laser.

Nous avons signalé au début du présent chapitre l'importance de la qualité de définition du bord de plage, il est nécessaire que les irrégularités et la zone de transition de l'échelon de phase soient par exemple inférieures au dixième de la tache de diffraction du système. Or, ceci n'est facilement réalisable que pour des ouvertures de la lentille L_o (fig. 1-1) faibles. Cependant, bien que nuisant à la précision des mesures, cette qualité du bord de la lame déphasante est moins critique dans le cas des défauts de phase importants, par exemple dans le cas des fortes aberrations géométriques. Aberrations dont l'étude fait l'objet du prochain chapitre.

CHAPITRE 3

APPLICATION DE LA TRANSFORMEE DE HILBERT A L'ETUDE DES ABERRATIONS

1 - INTRODUCTION

Le premier chapitre a porté sur la réalisation optique de la transformée de Hilbert, le second sur la précision avec laquelle devaient être réalisés et centrés les filtres déphasants. Ici, nous allons plus particulièrement étudier deux objets types de basses fréquences: l'aberration sphérique du troisième ordre, puis la bosse de phase à profil sinusoïdal.

Il faut distinguer le cas des fortes aberrations de celui des faibles aberrations. En effet, lorsque les aberrations (ou variations de phase d'une façon plus générale) sont fortes, un raisonnement purement géométrique, identique à celui que l'on utilise pour la méthode de Foucault {5} est suffisant. On est alors ramené au cas du "Minimunstrahlkennzeichnung" de H. WOLTER {2} qui a, en particulier, été repris par les chercheurs de l'Institut Franco-Allemand de Saint-Louis sous le nom de Strioscopie par soustraction d'amplitude {18}

Tout différent est le cas des faibles aberrations car il n'est plus possible de négliger la diffraction et l'on se trouve en présence du "Minimunschlierenverfahren" de WOLTER.

...

2 - CAS DES FORTES ABERRATIONS - ETUDE CEOMETRIQUE

On néglige ici l'influence de la diffraction et l'on raisonne uniquement sur les "rayons" lumineux définis comme étant les normales en chaque point à la surface d'onde.

2.1. Visualisation d'un défaut ou d'une aberration par la méthode de Foucault

Le montage utilisé est celui de la figure 3-1 qui est exactement celui de la figure 1-1, adapté à l'observation directe visuelle. L'oeil OE remplace la lentille L, le plan d'observation Π étant ici la rétine de l'oeil.

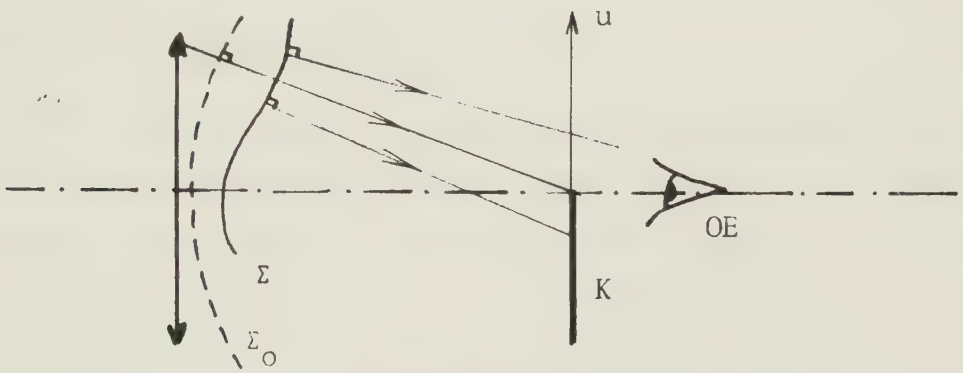


Figure 3-1

Dans la méthode de Foucault, on introduit un demi-plan opaque K au voisinage du plan spectral du dispositif. L'arête du couteau et l'axe du système déterminent le centre d'une spère de référence Σ_o, s'appuyant sur la pupille de sortie du système, sphère à laquelle on compare l'onde émergente Σ.

Suivant que le rayon converge en avant ou en arrière de l'arête du couteau K, l'oeil observera au point correspondant de l'onde Σ une zone sombre ou une zone éclairée.

Les limites des zones sombres et claires fournissent la carte des points où l'onde émergente est parallèle à la sphère de référence.

...

Ceci constitue l'explication élémentaire très classique du fonctionnement du dispositif de Foucault.

Dans la pratique, la source S_o, donc son image S, présente une certaine largeur, de plus les phénomènes de diffraction interviennent et il existe une zone de transition entre les parties sombres et éclairées qui rend les pointés délicats et peu précis.

Dans la méthode par transformée de Hilbert, la zone de transition floue et dissymétrique devient parfaitement symétrique ce qui rend les pointés plus précis, comme on peut le voir sur la photo de la figure 3-16 par exemple.

2.2. Méthode par transformée de Hilbert

Si l'on remplace le couteau de Foucault par un filtre déphasant de π radians la moitié du plan, les rayons qui convergent en avant ou en arrière de l'arête du couteau ne sont pas perturbés et produisent sur la rétine qui n'est pas sensible à la phase, des éclairements égaux. Les régions de la pupille de sortie du système qui correspondent à ces rayons paraissent également éclairés. En ce qui concerne les rayons passant par la limite de séparation des deux plages, ils présentent par raison de symétrie simultanément la phase 0 et la phase π, et l'on peut considérer qu'à cet endroit, la transparence du couteau de phase est nulle.

Il apparaît donc une ligne noire dessinant le lieu des points pour lesquels la surface d'onde Σ est parallèle à la surface d'onde Σ_o. Cette théorie très élémentaire laisserait supposer que la ligne noire est infiniment mince. En fait, il n'en est rien car, ici aussi, il faut tenir compte de la diffraction.

Si l'on considère une onde sphérique parfaite, tous les rayons passent pas l'arête du couteau de phase si celui-ci est centré sur l'image S et le champ paraît complètement obscur.

...

On a vu au chapitre 1 qu'une étude plus détaillée faisant intervenir la diffraction montre que le champ n'est parfaitement obscur qu'au centre et que le bord extérieur est entouré d'un anneau brillant {12} (résultat permettant de respecter le principe de conservation de l'énergie){9}{26}.

2.3. Influence de la diffraction

On a vu que dans le cas de la méthode de Foucault, comme dans celui de la méthode par transformée de Hilbert, la séparation entre ombre et lumière (Foucault) ou la ligne noire (Hilbert) ne sont pas infiniment fines. Nous allons essayer de chiffrer le gain obtenu grâce à l'emploi d'un écran déphasant au lieu d'un écran opaque.

Considérons le cas d'une onde sphérique convergeant au point S, le couteau K étant défocalisé d'une quantité ζ

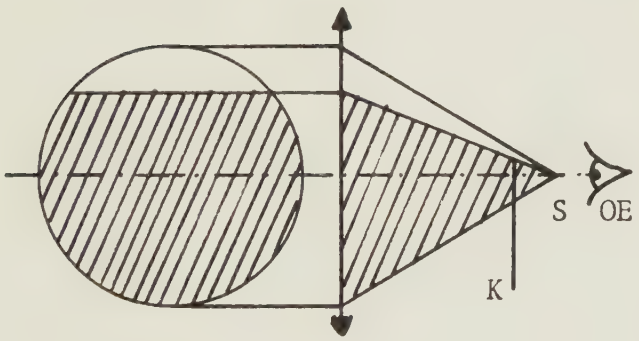


Figure 3-2

L'oeil OE qui observe la pupille de sortie verra celle-ci uniformément éclairée, sauf dans la région où les rayons sont arrêtés par le couteau de Foucault comme représenté sur la figure 3-2 (dans le cas d'un écran déphasant, on observerait une ligne noire).

En appliquant le principe du retour inverse, on peut se représenter le phénomène en imaginant que l'oeil observe un écran situé dans le plan de la pupille de sortie éclairée par une source ponctuelle S. Si l'on fait intervenir la diffraction par le bord de l'écran, on trouve (voir annexe A) que l'éclairement dans le plan de la pupille de sortie présente l'aspect indiqué figure 3-3

...

a) dans le cas d'un demi-plan déphasant (transformée de Hilbert)
b) dans le cas d'un demi-plan opaque (Méthode de Foucault)

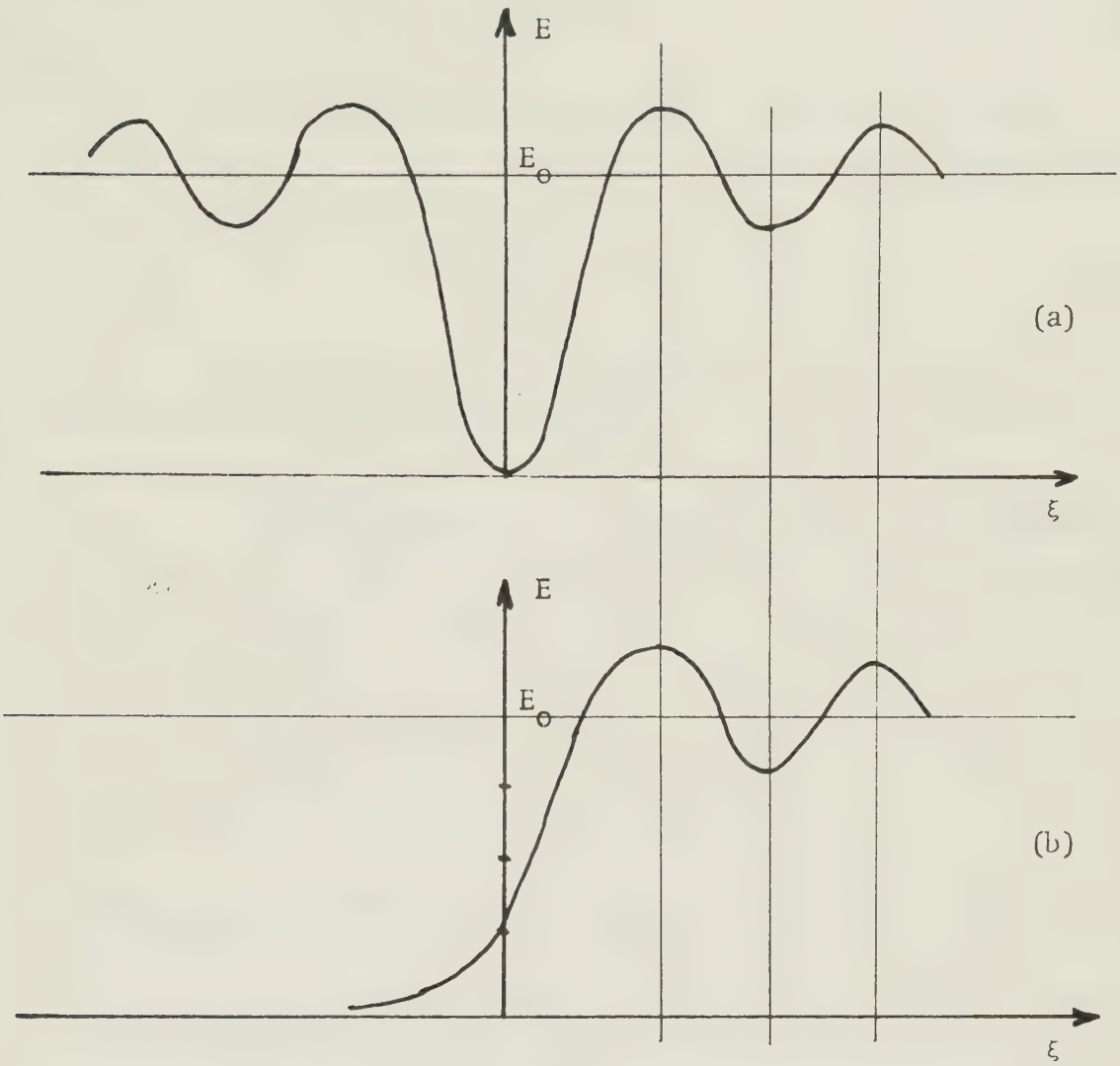


Figure 3-3

On peut noter sur cette figure que les maxima et les minima se correspondent exactement, le premier maximum correspondant à une distance (voir annexe A)

$$\xi = 1{,}22\sqrt{\frac{(d-\zeta)\ \lambda d}{2\zeta}}$$

$$\xi \simeq \sqrt{\frac{\lambda d^2}{2\zeta}}$$

...

Si l'on pointe la frange noire à 2/10 de frange près, sa position est déterminée avec une précision.

$$\sigma_1 = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{\lambda d^2}{2\zeta}} \qquad (3\text{-}1)$$

Dans le cas du couteau opaque, le pointé est beaucoup moins précis et il semble raisonnable d'adopter une valeur de l'ordre de $\xi/2$, soit une précision

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda d^2}{2\zeta}} \qquad (3\text{-}2)$$

On voit donc que la méthode par transformée de Hilbert permet d'espérer un gain de précision d'un facteur supérieur à 2.

Il est à noter que si le montage présente de la lumière parasite ce qui, dans la pratique est toujours le cas, il n'est plus possible de connaître l'éclairement qui correspond à la limite de l'ombre géométrique de l'écran de Foucault et la précision des mesures diminue. Par contre, dans le cas d'un écran déphasant de Π radians, on pointe un minimum d'éclairement qui ne se déplace pas quelque soit la quantité de lumière parasite.

2.4. Application à l'étude des aberrations

On se propose d'étudier l'aberration de l'onde émergeant de la lentille L_o et qui vient former l'image S'du point source S_o.

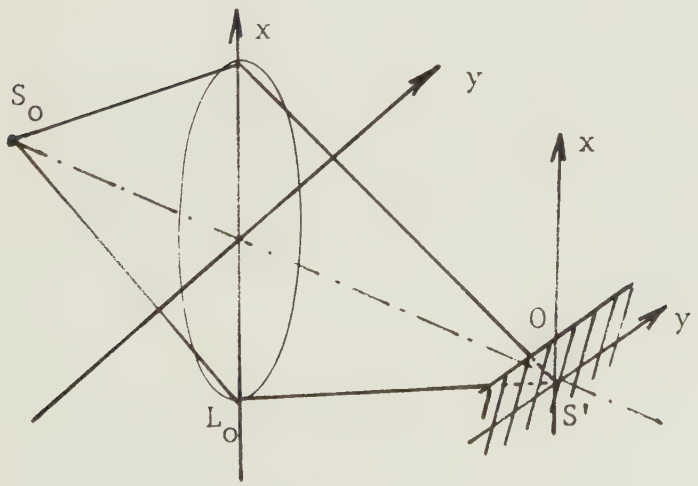


Figure 3-4

Pour cela, on va comparer l'onde émergeant de la pupille de sortie avec une onde sphérique centrée sur l'arête O du couteau de phase (figure 3-4)

...

Si l'amplitude de l'onde émergente dans le plan de la pupille de sortie est

$$f(x,y) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\delta o(x,y)} \qquad (3\text{-}3)$$

elle sera par rapport à l'onde sphérique de référence

$$f'(x,y) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\left[\delta o + a\frac{x^2+y^2}{R^2} + \frac{bx}{R} + c\right]} = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\delta} \qquad (3\text{-}4)$$

R représente le rayon de la pupille de sortie.

a, b et c fixent respectivement la courbure, la position suivant z et suivant x du centre O de l'onde de référence, c'est-à-dire de l'arête du couteau.

On a vu au § 2-3 qu'une ligne noire dessine le lieu des points pour lesquels l'onde émergente est parallèle à l'onde sphérique dans un plan vertical, c'est-à-dire en fait le lieu des points pour lesquels

$$\frac{d\delta}{dx} = 0$$

2.5. Cas d'une aberration sphérique

Nous considérerons le cas de l'aberration sphérique du troisième ordre, le déphasage s'écrit alors :

$$\delta = \alpha\frac{(x^2+y^2)^2}{R^4} + a\frac{x^2+y^2}{R^2} + \frac{bx}{R} + c \qquad (3\text{-}5)$$

où α caractérise l'aberration sphérique.

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{2\alpha(x^2+y^2)\,2x}{R^4} + \frac{2ax}{R^2} + \frac{b}{R} = 0 \qquad (3\text{-}6)$$

donne le lieu des points pour lesquels les surfaces d'onde sont parallèles (suivant la direction x), (3-6) est l'équation d'une cubique qui dans le casoù le couteau est centré sur l'axe du système (b=0) dégénère en une droite d'équation.

$$x = 0$$

et un cercle d'équation

$$x^2 + y^2 = -\frac{aR^2}{2\alpha} \qquad (3\text{-}7)$$

...

Pour a = 0 (couteau au foyer paraxial), le cercle se réduit à son centre.

Pour a = - 2α (couteau au foyer marginal), le cercle occupe tout le champ.

On retrouve les résultats de la méthode de Foucault et l'on sait {15} que, si l'arête du couteau passe par l'axe du système, la mesure du diamètre du cercle en fonction de l'enfoncement longitudinal de ce couteau permet de tracer directement le profil tangentiel de l'aberration sphérique, puis par une intégration graphique, de remonter à la surface d'onde (profil normal).

La figure 3-5 où d est la distance de la pupille de sortie au plan de l'image S rappelle ce résultat. On a

$$t = y \frac{\zeta}{d + \zeta} \simeq y \frac{\zeta}{d}$$

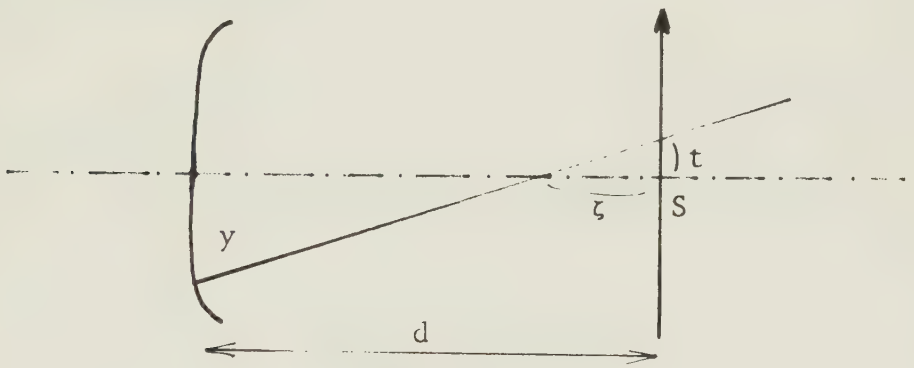


Figure 3-5

La mesure de y et ζ permet de tracer le profil tangentiel t = f(y) puis d'atteindre l'écart normal

$$\Delta = - \frac{1}{d} \int_0^y t \, dy \qquad (3\text{-}8)$$

On peut aussi envisager, comme le préconise G. YVON {15} de rechercher le profil d'incurvation puis, par deux intégrations, de remonter au profil normal.

...

2.6. Utilisation du profil d'incurvation

La méthode consiste pour différentes positions longitudinales du couteau et par déplacement latéral, à repérer la dernière position des courbes de niveau c'est-à-dire les "sommets" ou des "fonds" de la surface d'onde.

Si l'on tente d'évaluer la précision avec laquelle il est possible de mesurer la position de ces sommets, on constate que la variation d'éclairement dans le cas de l'écran déphasant est plus rapide qu'avec l'écran de Foucault. Cependant, dans le cas de la méthode par transformée de Hilbert, il faut pointer la disparition d'une tache sombre dans un fond lumineux, alors que la situation est exactement inverse dans le cas de la méthode de Foucault. Par suite, la méthode par T.H. n'apporte pas ici de gain appréciable.

2.7. Cas de l'astigmatisme

De même, dans le cas de l'astigmatisme, le déphasage peut s'écrire

$$\delta = \underbrace{\alpha\,(x^2 - y^2) + \beta\,xy}_{\text{astigmatisme}} + \underbrace{a(x + y) + bx + c}_{\text{position du couteau}} \qquad (3\text{-}9)$$

$$\frac{d\delta}{dx} = 2\alpha x + \beta y + 2ax + b$$

Les lignes noires ont pour équation

$$y = -2\,\frac{(a + \alpha)}{\beta}\,x - \frac{b}{\beta} \qquad (3\text{-}10)$$

L'expression (3-10) représente une droite qui, pour $b = 0$ (couteau sur l'axe) passe par l'origine et dont la direction varie en fonction du déplacement longitudinal du couteau ; pour une position telle que $a = -\alpha$, cette droite est perpendiculaire à l'arête du couteau.

Ici aussi on obtient un résultat parfaitement analogue à ce que donne la méthode de Foucault, la ligne de séparation entre une plage sombre et une plage claire est remplacée par une ligne noire sur fond clair que l'on peut pointer avec plus de précision.

3 - CAS DES FAIBLES ABERRATIONS

L'étude géométrique précédente ne s'applique qu'au cas des aberrations ou défauts de phase importants, nous y avons négligé l'intervention de la diffraction et n'avons même plus employé l'expression "transformée de Hilbert". Si l'analyse purement géométrique des phénomènes est suffisante dans le cas des défauts de phase importants, il faut, lorsqu'ils diminuent, effectuer un calcul de diffraction rigoureux qui, dans le cas général, est extrêmement lourd, mais se simplifie lorsque l'on s'intéresse aux très petits défauts car on peut alors effectuer un certain nombre d'approximations et les résultats se simplifient notablement.

Le calcul complet de la réponse obtenue dans le plan image du dispositif à double diffraction est explicité dans l'annexe B, nous reportons ici seulement les résultats. L'éclairement dans le plan image d'un instrument présentant de l'aberration sphérique est, en normalisant le rayon de la pupille de sortie à R = 1,

$$E(x,y) = \left| r(x,y) \right|^2 \qquad (3\text{-}11)$$

avec, en appelant r_o la réponse dans le cas d'une aberration nulle,

$$r(x,y) = a_o r_o + \frac{1}{\pi}\left[a_1 I_1 + a_2 I_2 + a_3 I_3 + a_4 I_4 \right] \qquad (3\text{-}12)$$

où

$$\left.\begin{aligned} a_o &= 1 + i\,\frac{2\pi}{\lambda}\left[\alpha y^4 + \beta y^2 + \gamma + \alpha x^4 + (2\alpha y^2 + \beta)\, x^2 \right] \\ a_1 &= -\frac{2\pi}{\lambda}\; 2x\left[2\alpha x^2 + 2\alpha y^2 + \beta \right] \\ a_2 &= \frac{2\pi}{\lambda}\left[6\alpha x^2 + 2\alpha y^2 + \beta \right] \\ a_3 &= -\frac{2\pi}{\lambda}\; 4\alpha x \qquad ; \qquad a_4 = \frac{2\pi}{\lambda}\,\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}13)$$

...

et, suivant que l'excentrement du couteau $u_o = \frac{\xi_o}{\lambda d}$ est nul ou non (3-14)

	Filtre centré $u_o = o$	Filtre décentré $u_o \neq o$
r_o	$\frac{i}{\pi} \text{Log} \left\| \frac{x+1}{x-1} \right\|$	$\frac{i}{\pi}\Big[\text{Ci}\,\lvert 2\pi u_o(x+1)\rvert - \text{Ci}\,\lvert 2\pi u_o(x-1)\rvert + i\{\text{Si } 2\pi u_o (x-1) - \text{Si } 2\pi u_o (x+1)\}\Big]$
I_1	-2	$-2\, e^{-iX} S$
I_2	$-2x$	$-2\, e^{-iX}\Big[xS + iC\Big] - \frac{i}{2\pi u_o} I_1$
I_3	$-\frac{2}{3}(3x^2+1)$	$-2\, e^{-iX}\Big[(x^2+1)S + 2ixC\Big] - \frac{2i}{2\pi u_o} I_2$
I_4	$-2x(x^2+1)$	$-2\, e^{-iX}\Big[x(x^2+1)S + i(3x^2+1)C\Big] - \frac{3i}{2\pi u_o} I_3$

avec

$$X = 2\pi u_o\, x$$

$$S = \frac{\sin 2\pi u_o}{2\pi u_o} \qquad C = \frac{\cos 2\pi u_o}{2\pi u_o} \tag{3-15}$$

Lorsque le couteau est centré $r(x,y)$ s'exprime de façon particulièrement simple, on a

$$r(x,y) = \frac{i}{\pi}\left[1 + i\frac{2\pi}{\lambda}\left(\alpha y^4 + \beta y^2 + \gamma + \alpha x^4 + (2\alpha y^2 + \beta)\, x^2\right)\right] \text{Log}\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \frac{2\pi}{\gamma}\left[2x\left(\alpha x^2 + 2\alpha y^2 + \beta + \frac{\alpha}{3}\right)\right] \tag{3-16}$$

Ceci nous a permis, par traitement sur ordinataire IBM 360 de tracer les courbes donnant l'éclairement lumineux $E(x,y) = r\,|(x,y)|^2$ dans le plan image Π'.

...

Les figures 3-6 montrent l'éclairement sur l'axe ox E(x,0) pour les valeurs de x variant de -1 à +1 dans le cas d'une aberration sphérique du troisième ordre de valeur maximale $\Delta = \lambda/10$

Figure 3-6a mise au point au foyer paraxial,
Figure 3-6b mise au point au meilleur foyer,
Figure 3-6c mise au point au foyer marginal.

Les courbes en pointillé correspondent au cas d'une aberration nulle.

On constate que c'est dans le cas où le couteau de phase est placé au meilleur foyer que la variation d'éclairement est la plus faible, ceci est logique et un expérimentateur effectuant un contrôle cherchera quel est le défaut irréductible, il se placera donc automatiquement à ce foyer. C'est donc dans ce cas que nous devons effectuer l'étude.

En utilisant l'expression (2-2), on peut calculer l'éclairement donné par la méthode de Foucault et par le contraste de phase ce qui permettra d'effectuer une étude comparée des diverses méthodes.

Les figures 3-7 montrent le résultat obtenu dansle cas d'une aberration sphérique de $\lambda/20$, le couteau étant au meilleur foyer et centré sur l'axe, l'éclairement obtenu par la méthode de Foucault (3-7a), par transformation de Hilbert (3-7b) et par contraste de phase (3-7c). Les courbes en pointillé correspondent au cas d'une aberration nulle.

On voit immédiatement que le contraste de phase n'est pas utilisable car l'observateur doit apprécier, dans le plan image, des variations d'éclairement qui ne sont pas symétriques. Ceci est caractéristique du contraste de phase lorsque les enfoncements du couteau sont faibles ou nuls. Il s'applique beaucoup mieux aux objets de hautes fréquences spatiales.

...

Figure 3-6 a

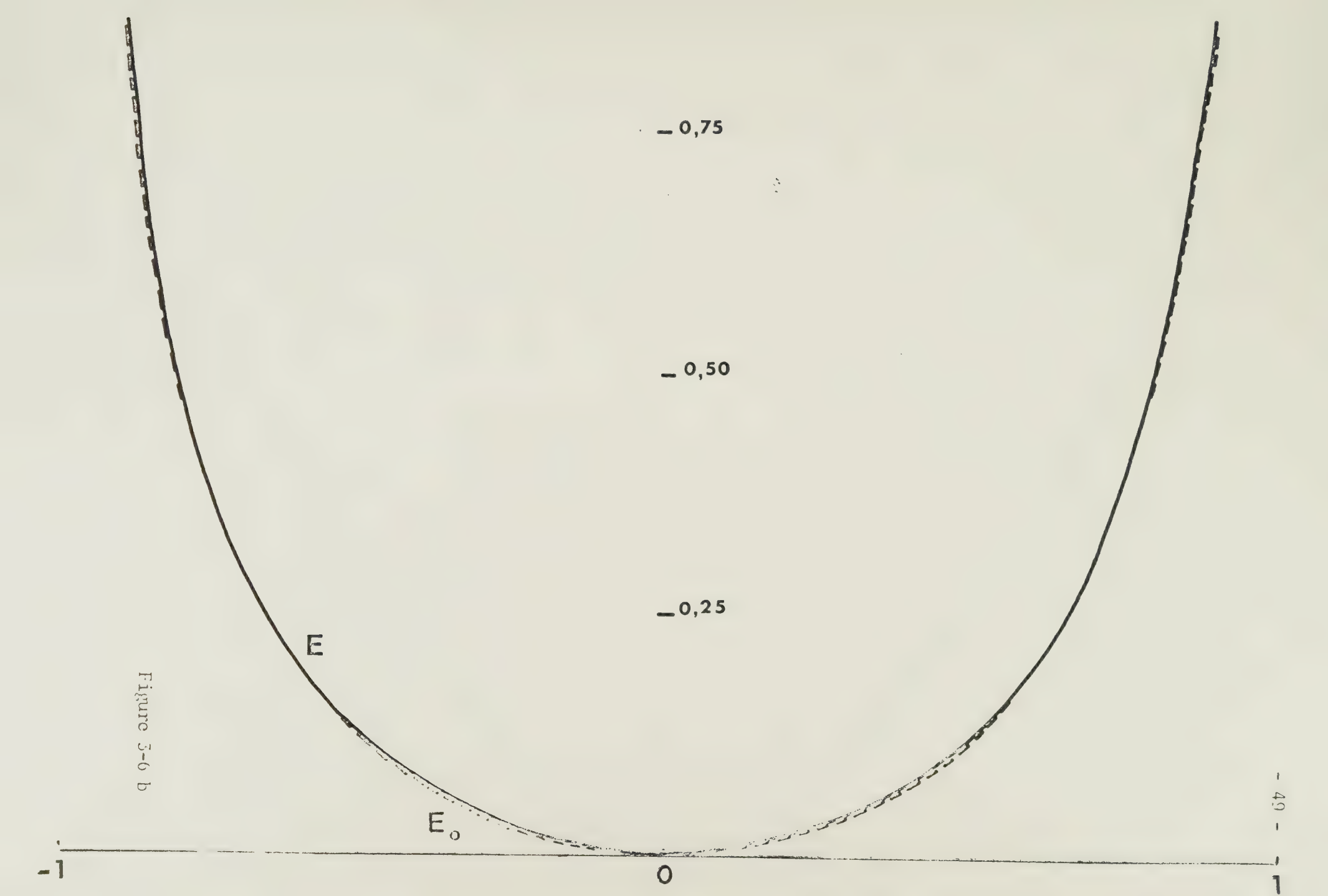


Figure 3-6 b

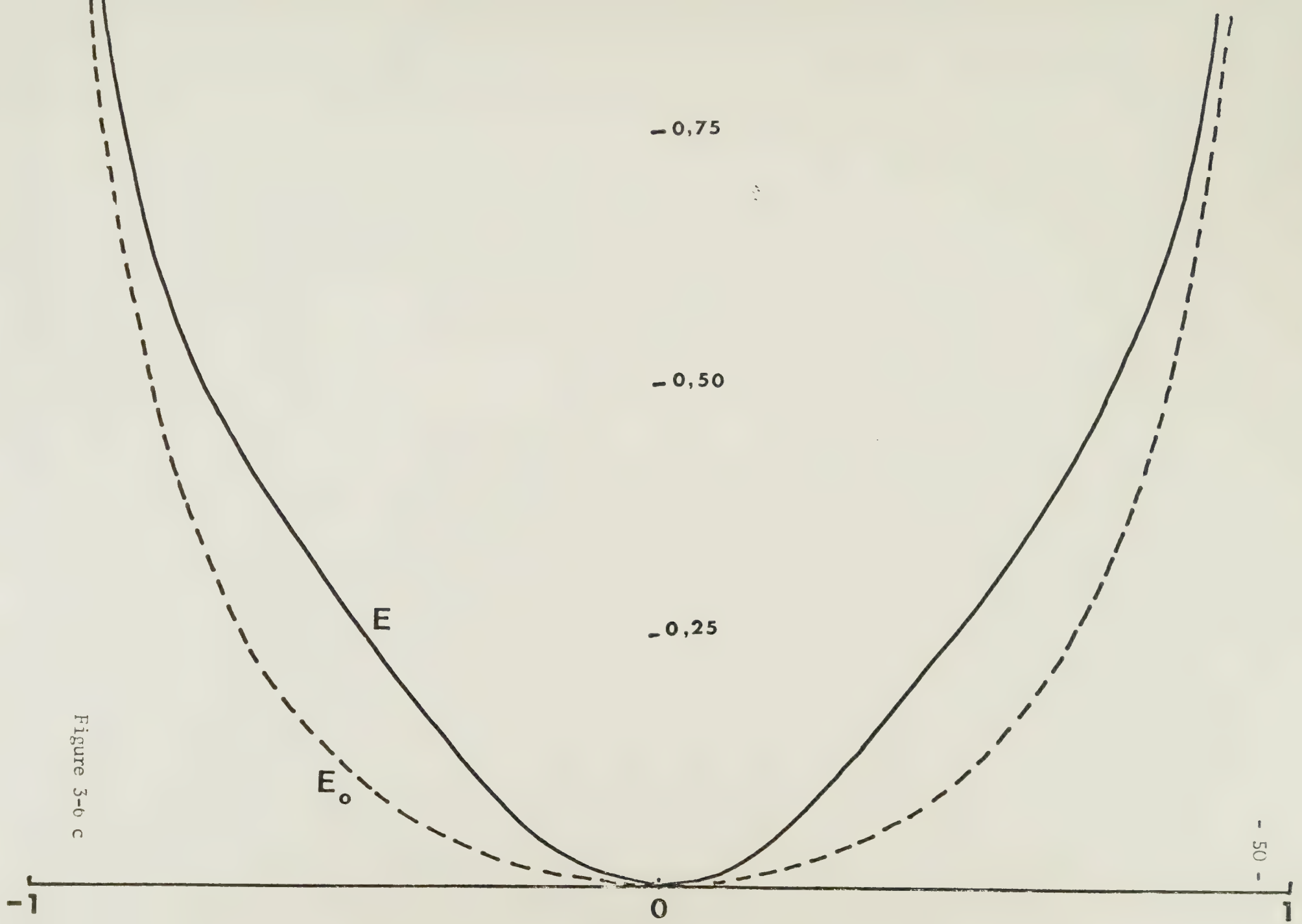


Figure 3-6 c

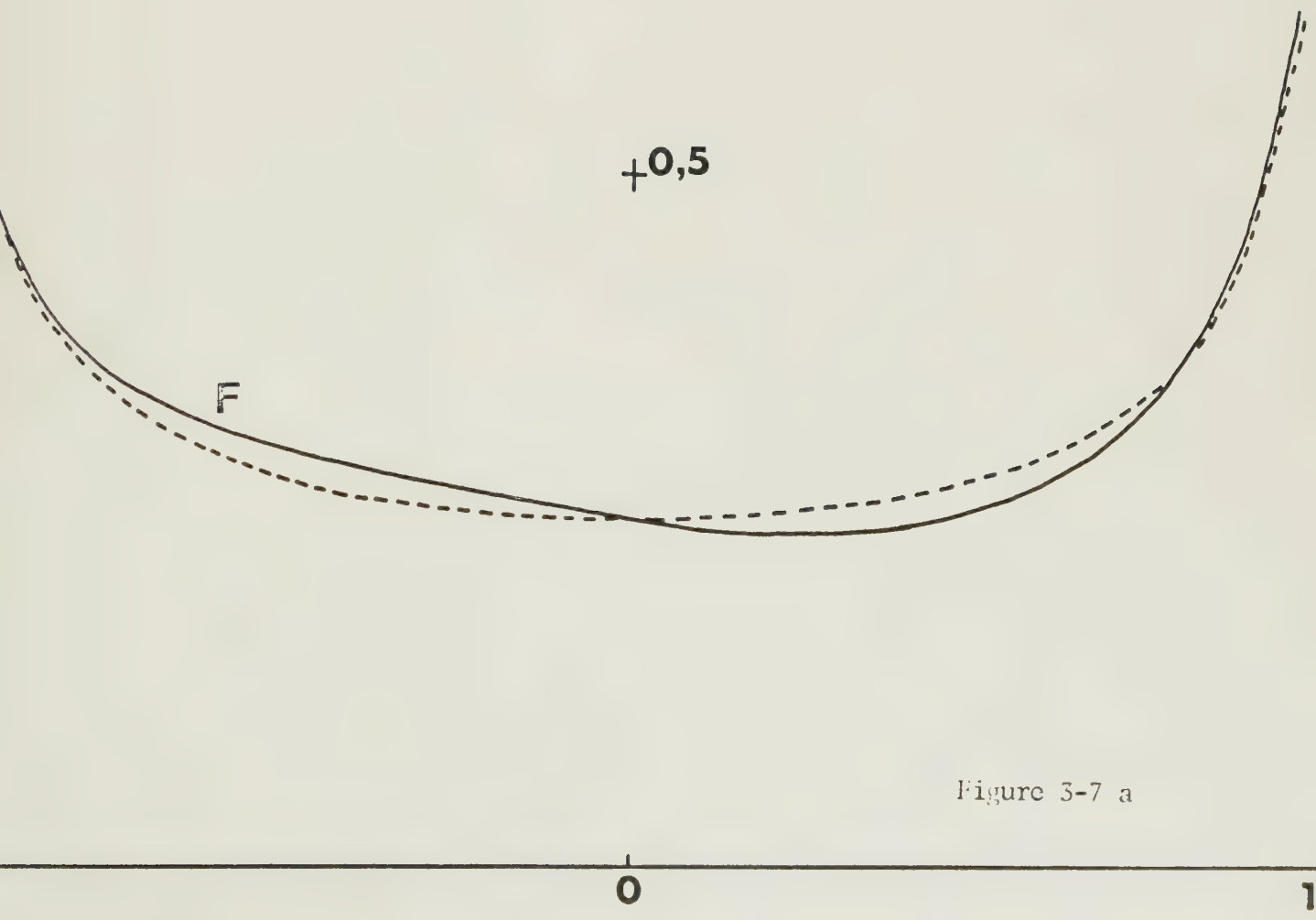


Figure 3-7 a

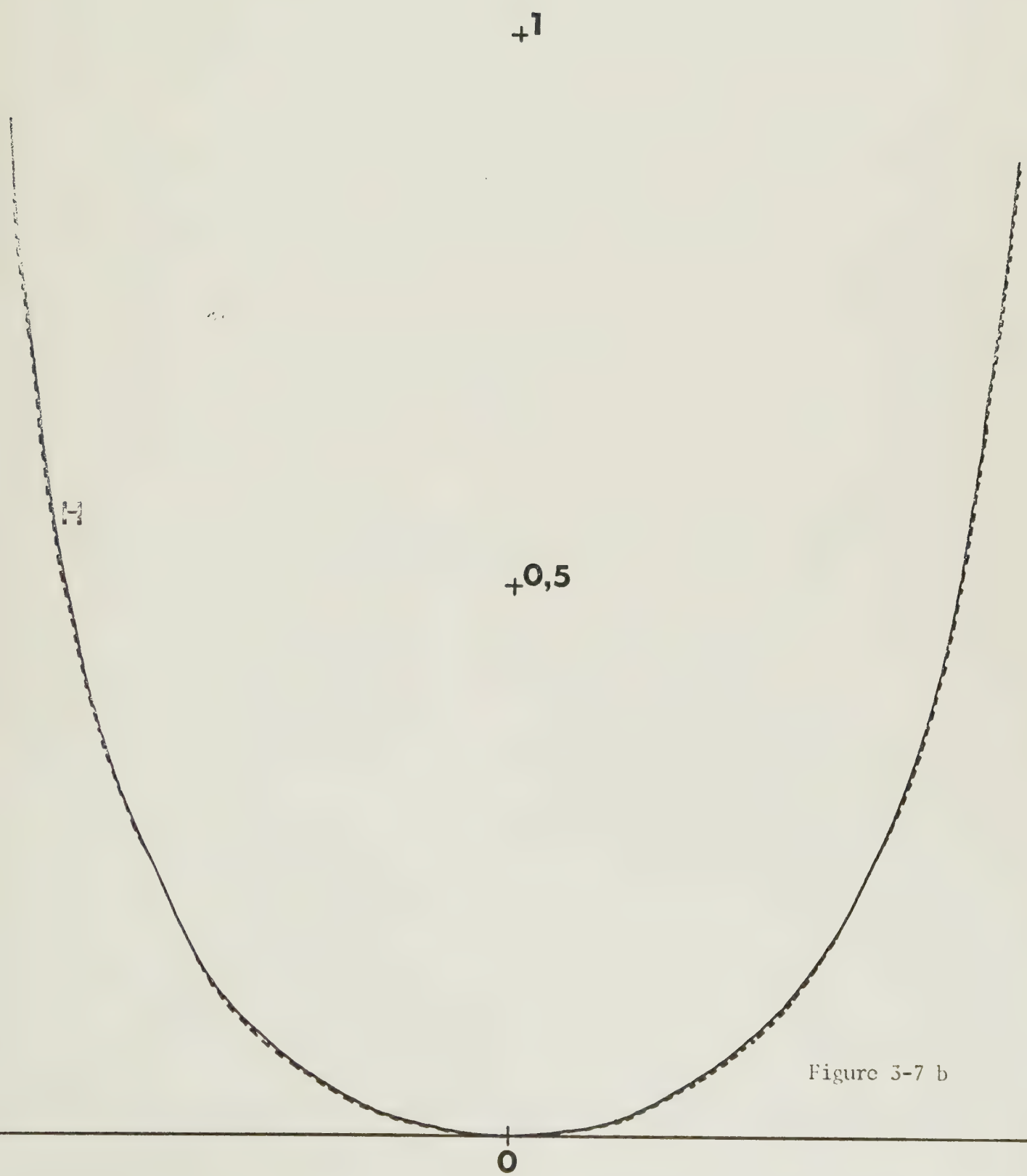


Figure 3-7 b

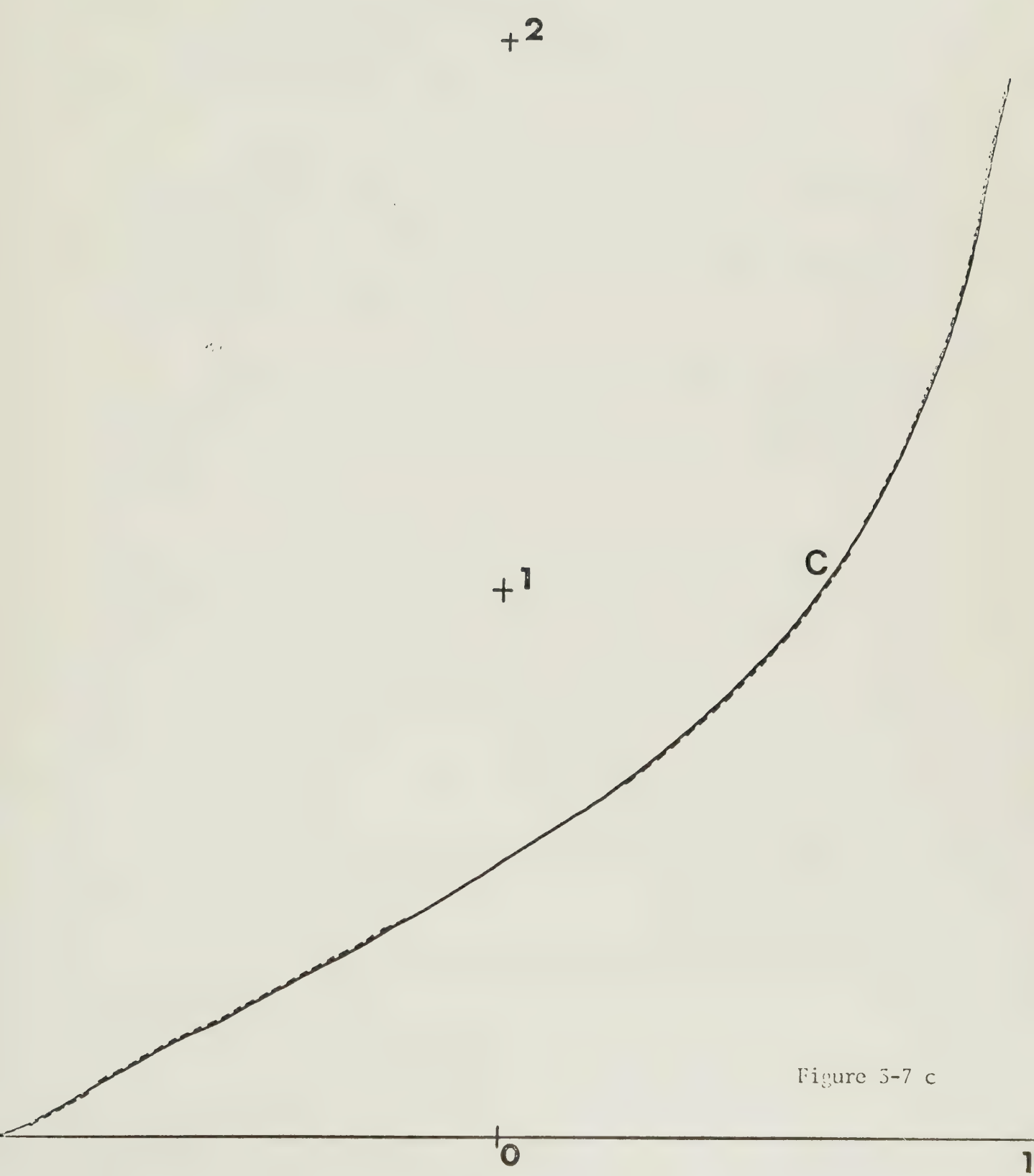


Figure 3-7 c

Les objets auxquels nous nous intéressons étant de basses fréquences, nous ne considérerons plus, dans ce qui suit, le cas du contraste de phase.

La méthode de Foucault et la méthode par transformée de Hilbert, par contre, fournissent des éclairements symétriques dans le cas d'une aberration nulle et les modifications de l'image sont de ce fait beaucoup plus perceptibles.

Les figures 3-7 sembleraient montrer que la méthode de Foucault est plus sensible que la méthode par T.H. Ceci est dû au fait que, dans le cas présent, la transparence du filtre est supposée égale à 1 dans le cas de la T.H., l'éclairement varie alors comme le carré du déphasage.

En utilisant un filtre présentant une absorption sur l'une des plages, on ajoute un fond continu cohérent et l'on obtient ce que nous avons appelé (§ 3-2 du chapitre précédent) "transformée de Hilbert mixte".

Les figures 3-8 montrent les résultats obtenus, pour la même aberration que précédemment, lorsque la transparence (en amplitude) du filtre varie entre 0 et 1.

Figure 3-8a transparence $t = 1$ (T.H. pure)
Figure 3-8b " $t = 0,5$
Figure 3-8c " $t = 0,25$
Figure 3-8d " $t = 0$ (Foucault)

Les courbes en pointillé correspondent à l'éclairement $E_o(x)$ en l'absence d'aberrations.

Sur les figures 3-9 et 3-10, on a tracé, pour la valeur $t = 0,25$, les courbes :

...

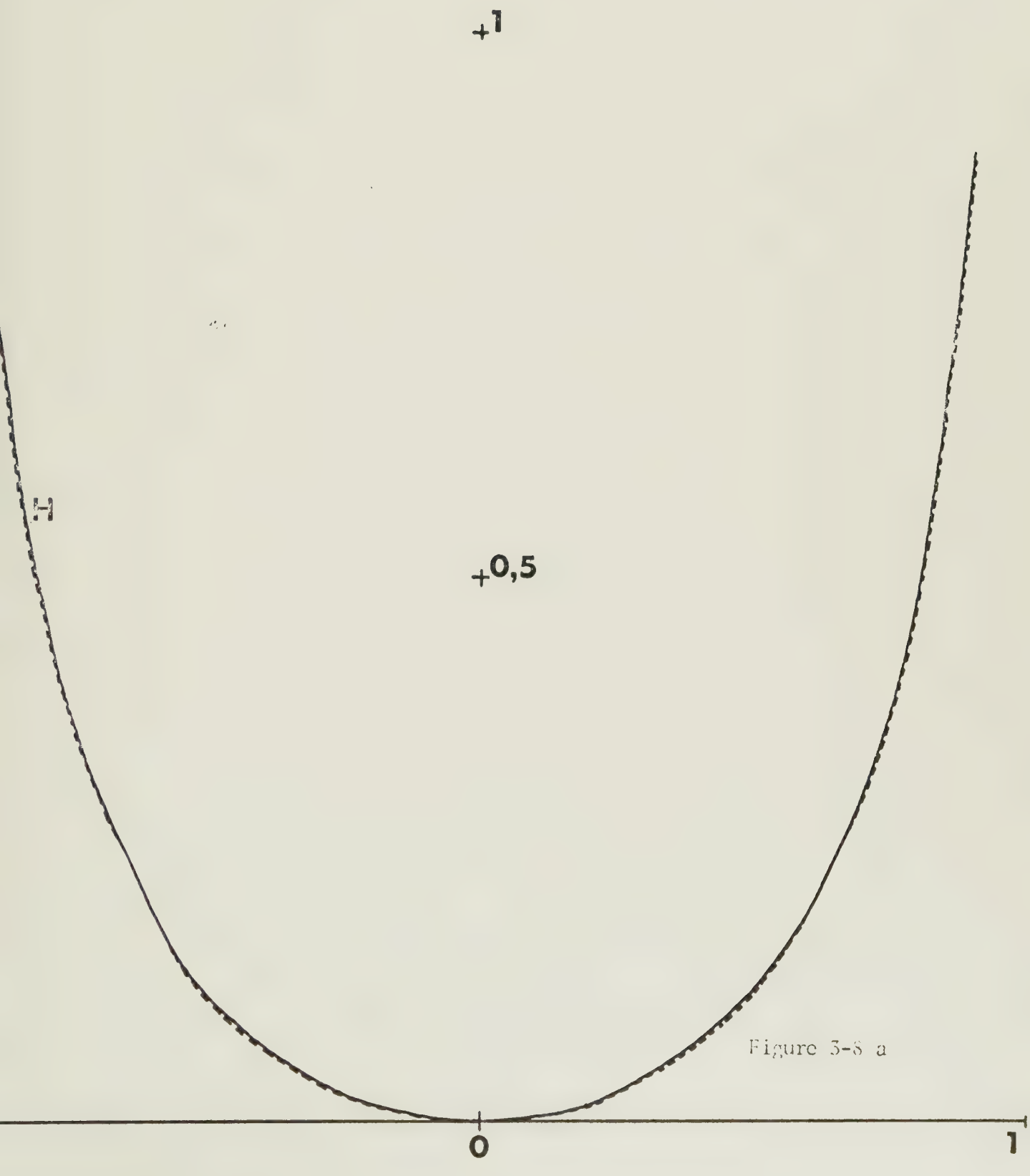


Figure 3-8 a

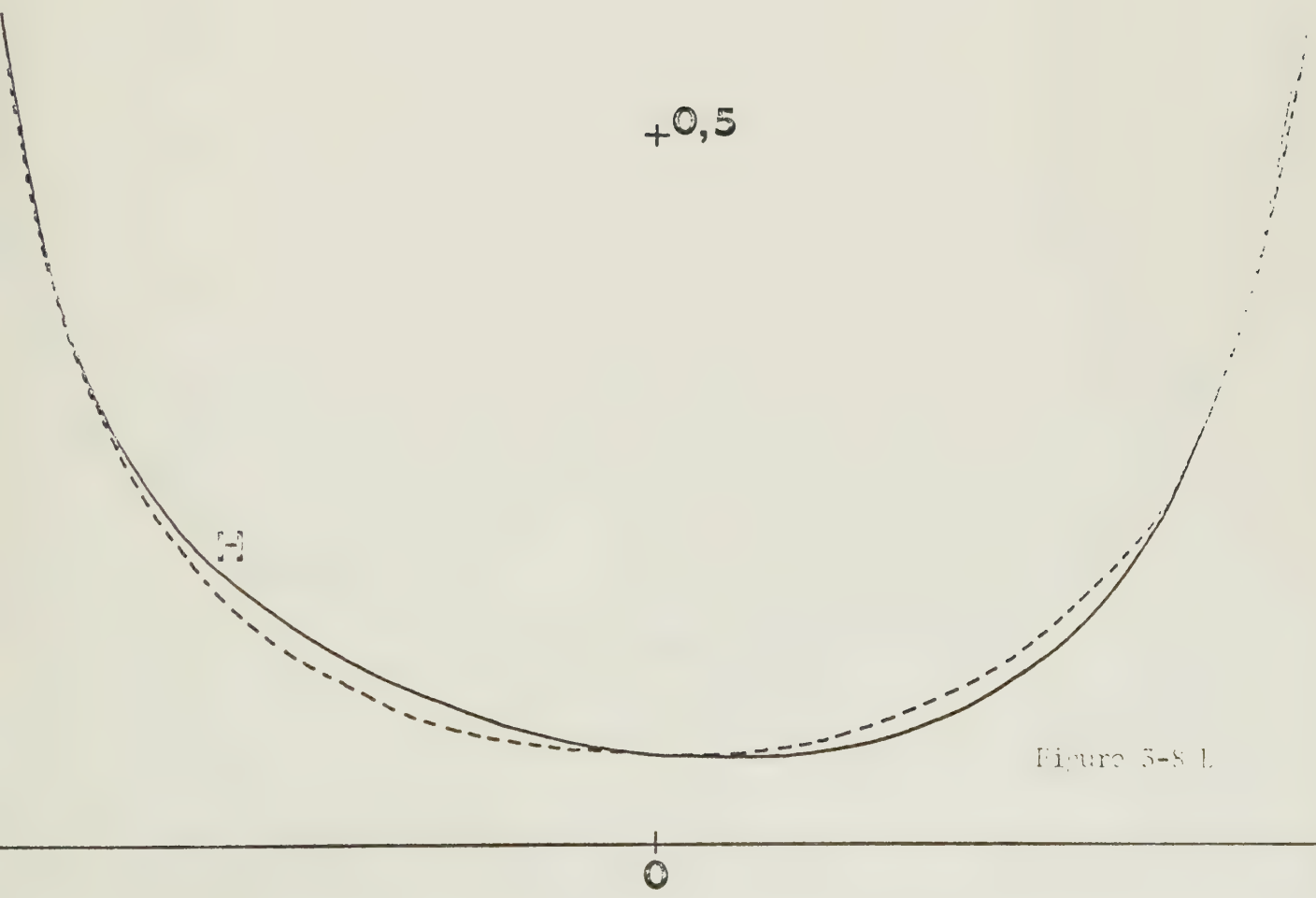


Figure 3-8 L

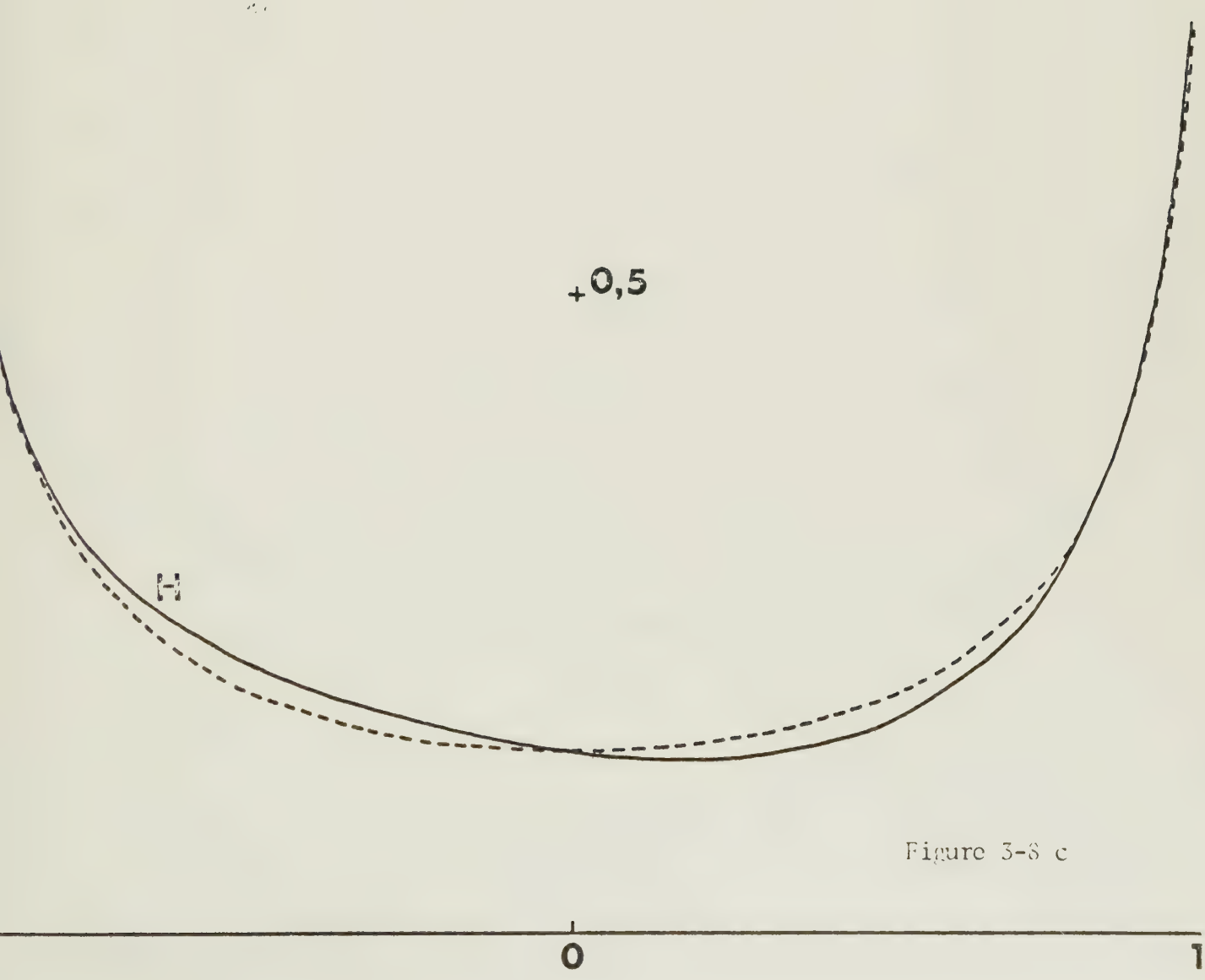


Figure 3-8 c

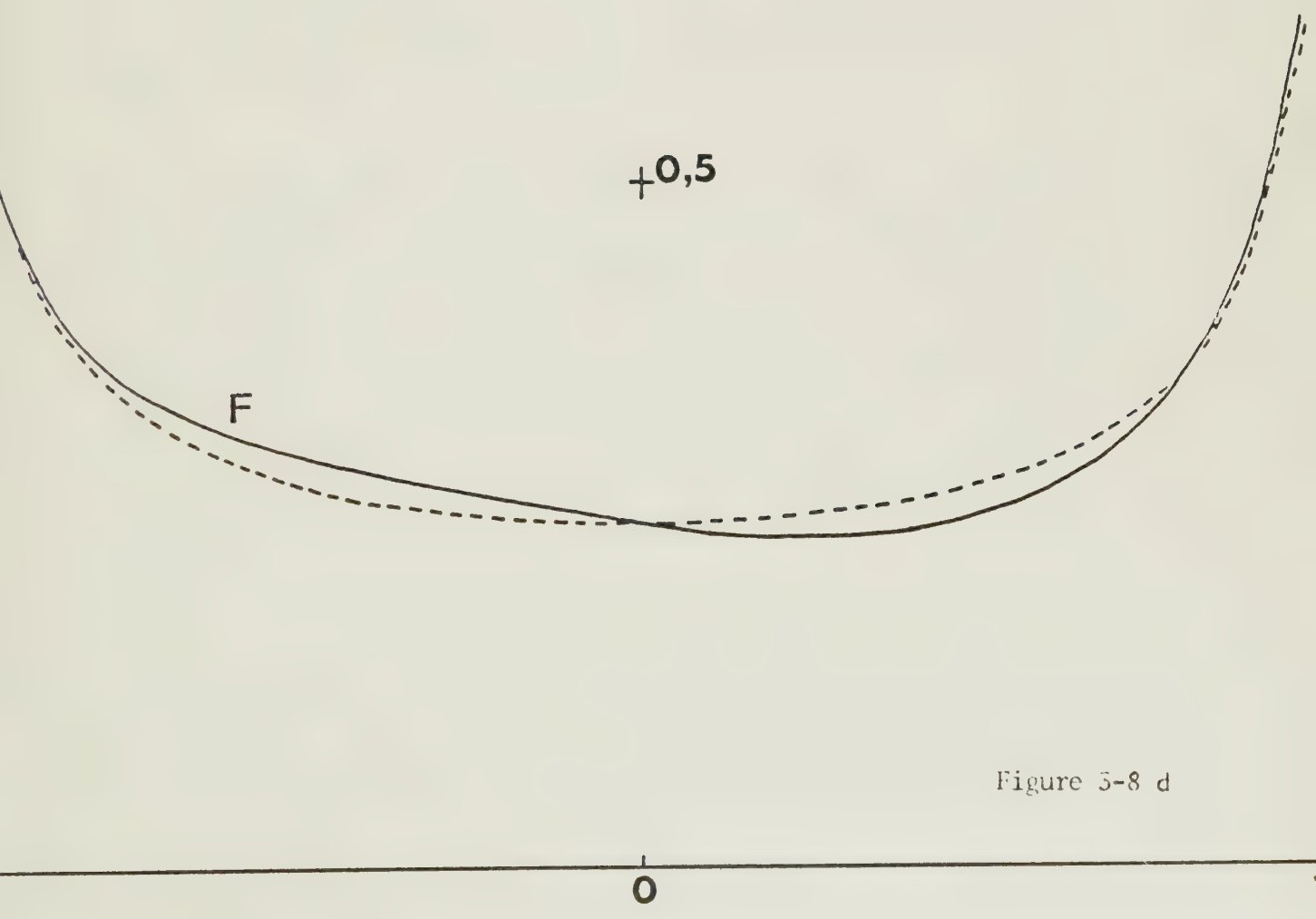


Figure 3-8 d

$$D(x) = E(x) - E_o(x) \qquad \text{(fig. 3-9)}$$

et

$$C(x) = \frac{E(x) - E_o(x)}{E_o(x)} \qquad \text{(fig. 3-10)}$$

qui montrent les variations absolues et relatives d'éclairement dans le plan image.

On constate que les variations absolues d'éclairement sont pratiquement les mêmes alors que les variations relatives sont plus importantes dans le cas de la "transformée de Hilbert mixte". On voit donc que par un choix judicieux de la transmittance du filtre, il est possible d'améliorer la sensibilité de la méthode.

Les résultats précédents concernent le cas où le couteau est parfaitement centré dans la tache de diffraction et montrent que l'on a intérêt à utiliser un couteau présentant une certaine absorption sur l'une des plages, ceci ayant pour effet d'ajouter un "fond cohérent" à la transformée de Hilbert de façon à visualiser les défauts par leur phase et non par le carré de celle-ci.

Nous allons voir que l'avantage que présente la méthode par T.H. devient plus net encore lorsque le couteau est légèrement décentré. Il faut tout d'abord remarquer que, pour les deux méthodes qui nous intéressent, dans le cas d'une aberration nulle, l'éclairement du champ est symétrique quel que soit l'enfoncement du couteau, comme on peut le voir à partir des expressions (3-11) à (3-14) (il n'en serait pas de même dans le cas du contraste de phase). La présence d'une faible aberration par contre amène une dissymétrie très nette tant dans le cas de la méthode par T.H. que dans le cas de la méthode de Foucault.

On a représente sur la figure 3-11, dans le cas d'une aberration sphérique de $\lambda/20$, pour un couteau situé dans le plan du meilleur foyer et décentré de 0,25 fois la largeur de la tache de diffraction, les éclairements obtenus avec la méthode de Foucault

...

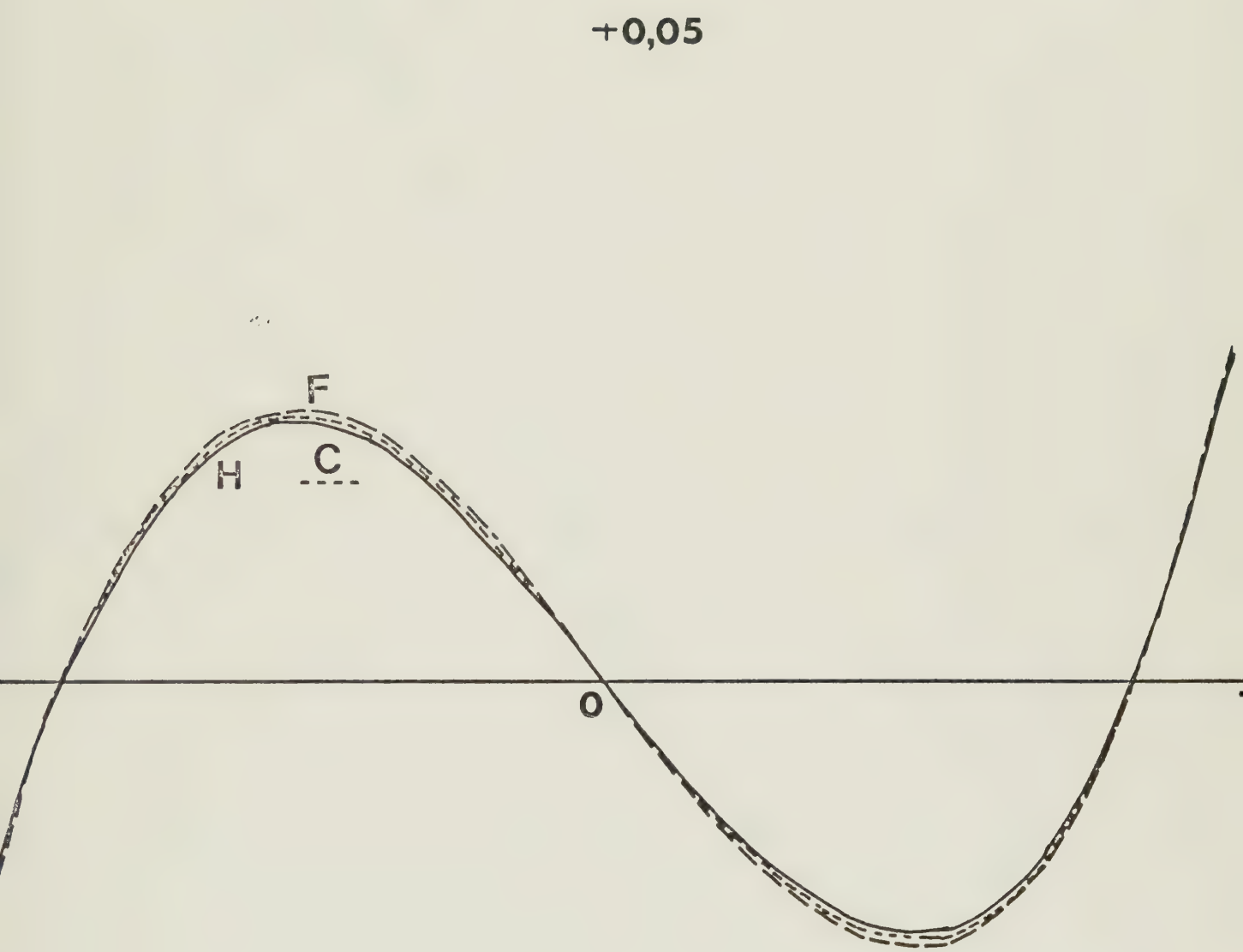


Figure 3-9

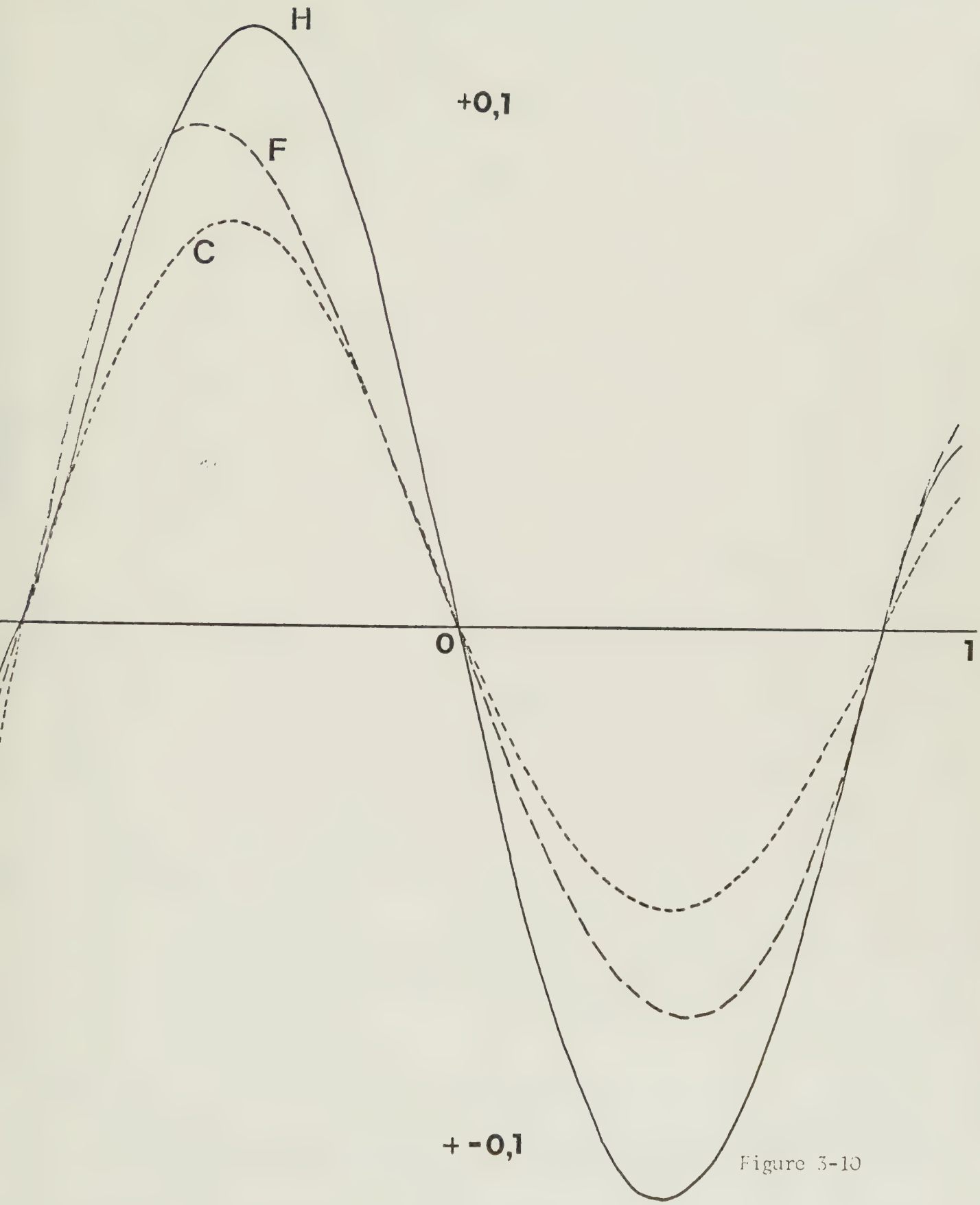


Figure 3-10

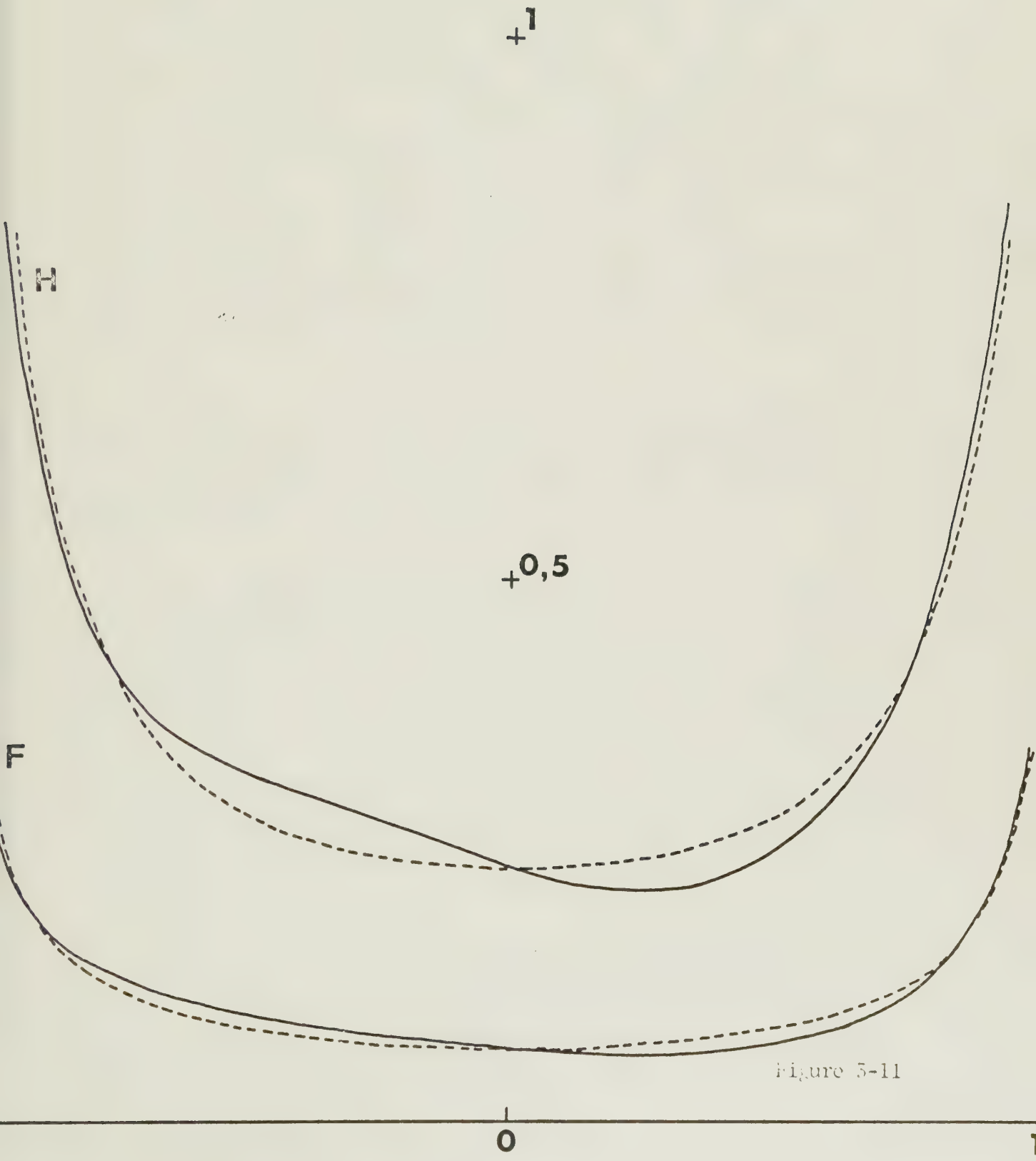


Figure 3-11

et avec la méthode par transformée de Hilbert lorsque le couteau présente une transparence en amplitude égale à 1. Les courbes en pointillé correspondent au cas où il n'y a pas d'aberration. Les courbes 3-12 et 3-13 montrent les variations absolues et relatives de l'éclairement dans le champ. Dans le cas de la méthode par T.H., les variations absolues d'éclairement sont nettement supérieures à celles observées pour la méthode de Foucault. D'autre part, les variations relatives sont légèrement supérieures et montrent une sensibilité plus grande de la méthode par transformée de Hilbert. Il est à noter que l'avantage que présente la méthode par T.H. est encore plus net si l'on tient compte de la lumière parasite. En effet la sensibilité de la méthode (caractérisée par les courbes de variations relatives) diminue d'autant moins rapidement que les variations absolues sont plus fortes, c'est-à-dire qu'une même quantité de lumière parasite apporte une variation moins perceptible de l'éclairement dans le plan image.

On peut remarquer que dans le cas du couteau décentré, il n'est pas nécessaire de donner une absorption au couteau de Hilbert pour ajouter un fond cohérent car les variations d'éclairement sont ici proportionnelles aux defauts de phase.

Il ressort de l'étude que nous venons de faire que lorsqu'on enfonce progressivement dans la tache de diffraction de la pupille un couteau déphasant de 180° une moitié du plan spectral, le plan image présente une forte dissymétrie d'éclairement, cette dissymétrie s'annule lorsque le couteau est centré puis change de sens lorsque le couteau franchit le centre du plan spectral. On peut noter, et ceci est très net expérimentalement, que, lors du passage au centre du plan spectral, l'image s'obscurcit brusquement, la majeure partie de la lumière étant rejetée à l'extérieur de l'image géométrique (voir § 4 chapitre 2).

Dans le cas de la méthode de Foucault, le champ image présente un éclairement dissymétrique qui n'est nettement visible que lorsque le couteau est centré, le champ image étant trop clair ou trop sombre selon que le couteau est en deçà ou au delà du plan spectral.

...

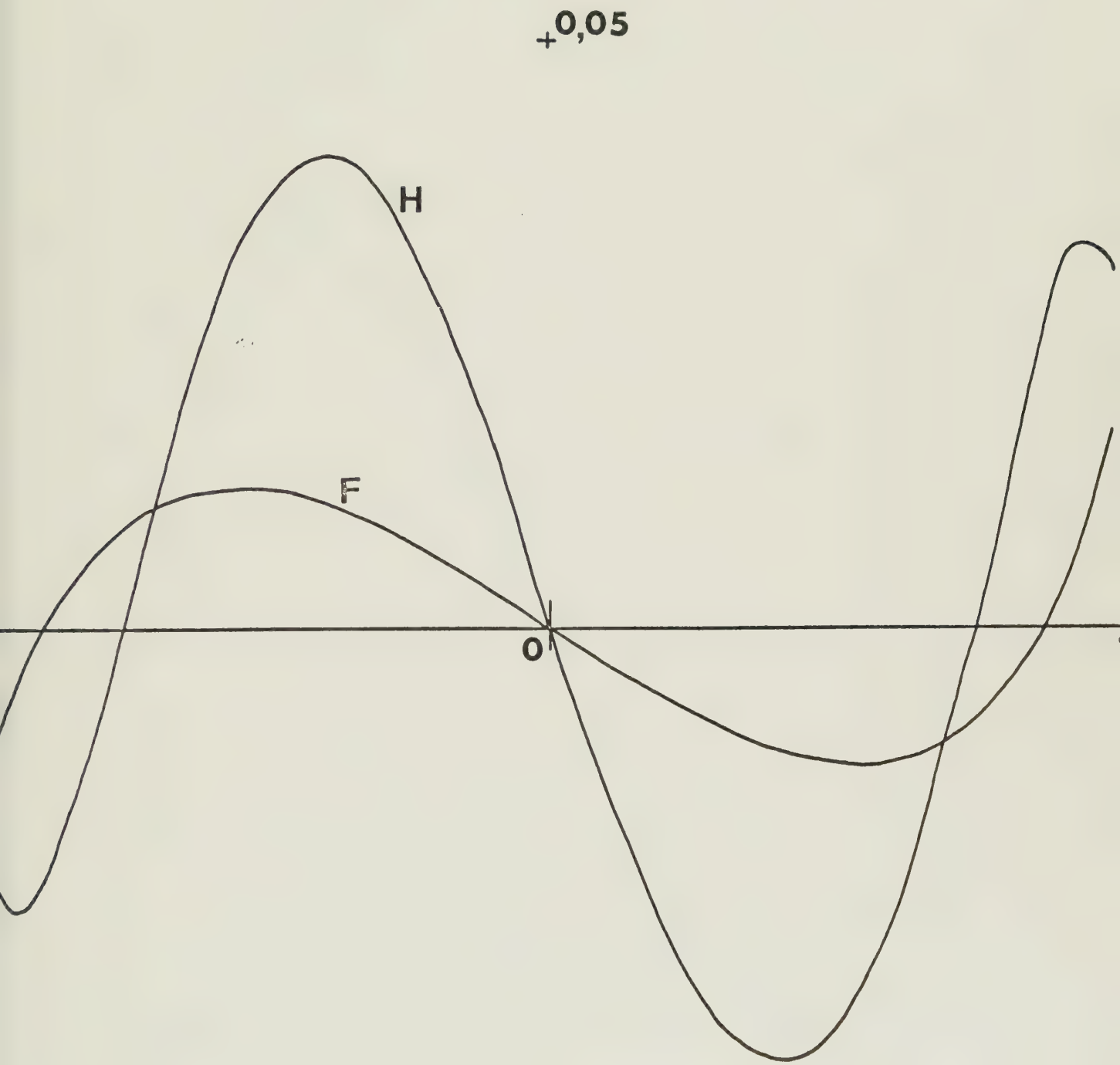


Figure 3-12

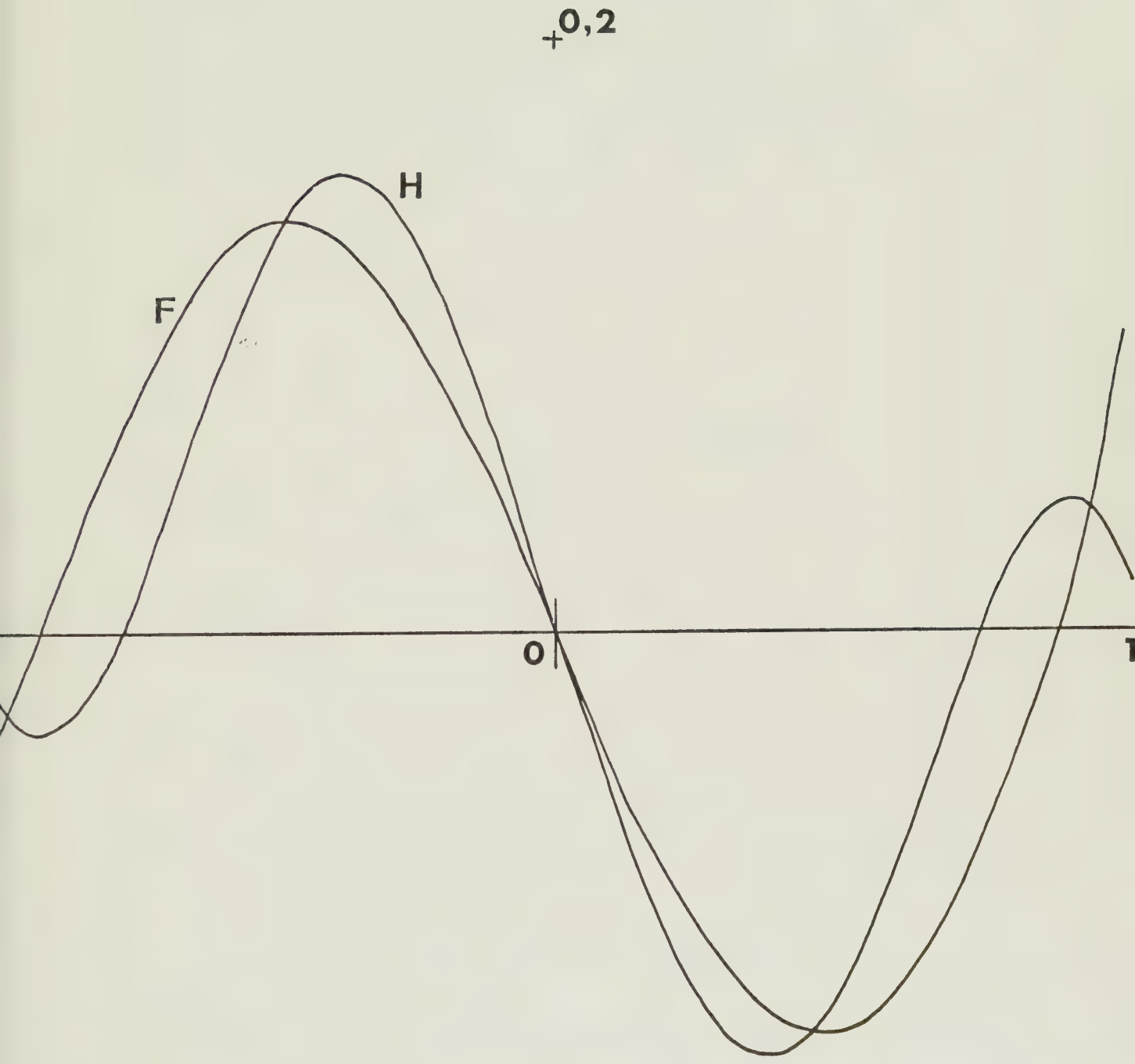


Figure 3-13

4 - CAS D'UNE BOSSE DE PHASE

Nous nous sommes jusqu'ici attachés à l'étude du cas particulier de l'aberration sphérique du troisième ordre, il est évident que le cas d'une aberration d'ordre supérieur relève d'un traitement identique. Il en est de même d'une bosse de phase quelconque dès que l'on sait exprimer analytiquement sa forme. A titre d'exemple, nous avons traité le cas d'une bosse ayant la forme d'une arche de sinusoïde. Cet objet (figure 3-14) s'écrit, a étant la largeur de la bosse de phase :

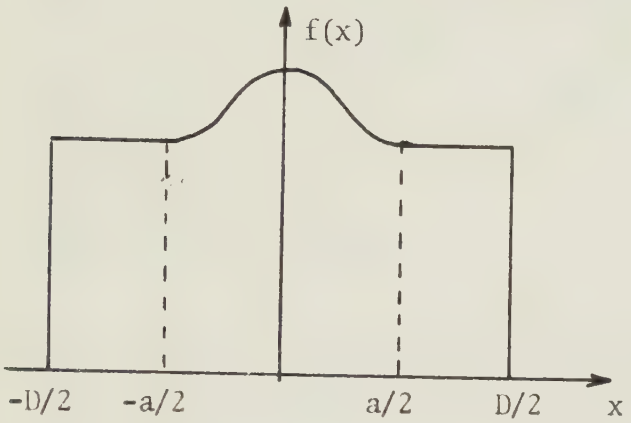


Figure 3-14

$$f(x) = \text{rect}\,\frac{x}{D}\, e^{-\phi_o \cos^2 \frac{\pi x}{a}}\, \text{rect}\,\frac{x}{a}$$

$$\simeq \text{rect}\,\frac{x}{D} + i\phi_o \cos^2 \frac{\pi x}{a} \qquad (3\text{-}17)$$

La transformée de Hilbert mathématique de cette fonction est

$$f_{Hi}(x) = -\frac{1}{\pi}\,\text{Log}\left|\frac{x-\frac{D}{2}}{x+\frac{D}{2}}\right| - \frac{\phi_o}{2\pi}\left[C\cos\frac{2\pi x}{a} + S\sin\frac{2\pi x}{a} + \left|\text{Log}\,\frac{x-\frac{a}{2}}{x+\frac{a}{2}}\right|\right]$$

où

$$\begin{cases} C = \text{Ci}\left[2\pi\left|\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right|\right] - \text{Ci}\left[2\pi\left|\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\right|\right] \\ S = \text{Si}\left[2\pi\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right)\right] - \text{Si}\left[2\pi\left(\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\right)\right] \end{cases} \qquad (3\text{-}19)$$

On a représenté sur les figures 3-15 les résultats pour une bosse de phase de $\lambda/50$ et dont la largeur était égale à la moitié du champ objet (a = D/2).

Les figures 3-15a & 3-15b représentent respectivement les éclairements dans le cas de la méthode de Foucault et dans le cas de la méthode par transformée de Hilbert, la transmittance du filtre ayant été fixée à 0,8. On voit que, si les variations absolues d'éclairement sont visiblement plus importantes dans le cas de la méthode de Foucault, les variations relatives (figure 3-15c) montrent un net avantage pour la méthode par transformée de Hilbert. Ici aussi, c'est la quantité de lumière parasite qui fixera l'avantage relatif d'une méthode par rapport à l'autre ainsi que la transmittance à donner au filtre de Hilbert.

5 - RESULTATS EXPERIMENTAUX

Les figures 3-16 et 3-17 montrent une aberration sphérique du troisième ordre observée par la méthode de Foucault et par la méthode par transformée de Hilbert dans le cas où le couteau est centré (fig. 3-16) et dans le cas où l'arête du couteau ne passe pas par le centre de la tache de diffraction (fig. 3-17).

Pour tenter d'effectuer une étude comparative, nous avons utilisé un montage qui permet d'obtenir, par simple rotation d'un analyseur :

- la transformée de Hilbert de l'objet
- le Foucaultgramme de l'objet
- l'objet lui-même.

Ce dispositif qui se compose principalement d'une lame biréfringente d'abord utilisée par le Pr KASTLER (20) et que nous apellerons "lame de Kastler" sera décrit et analysé au chapitre 5.

...

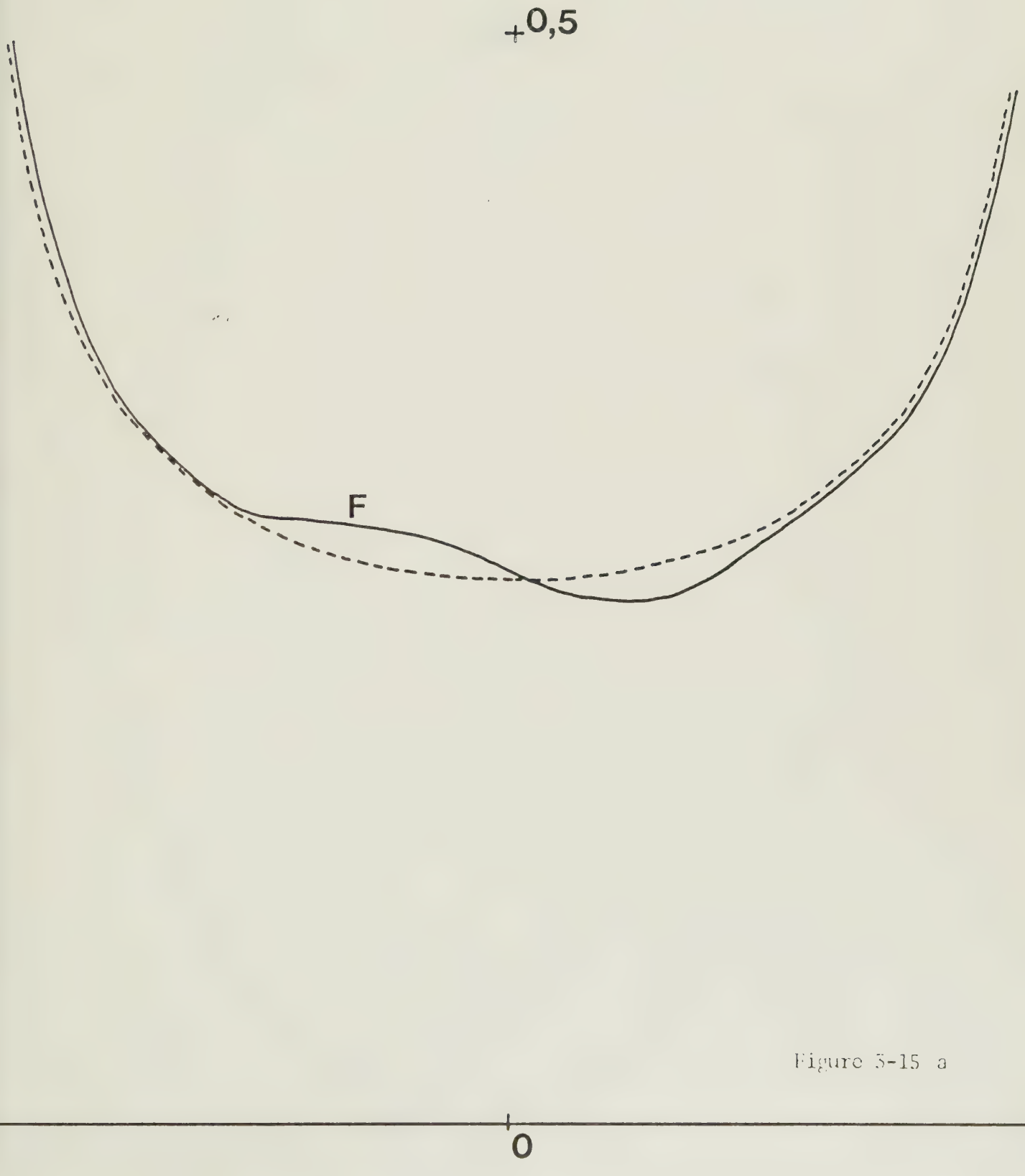


Figure 3-15 a

Figure 3-15 b

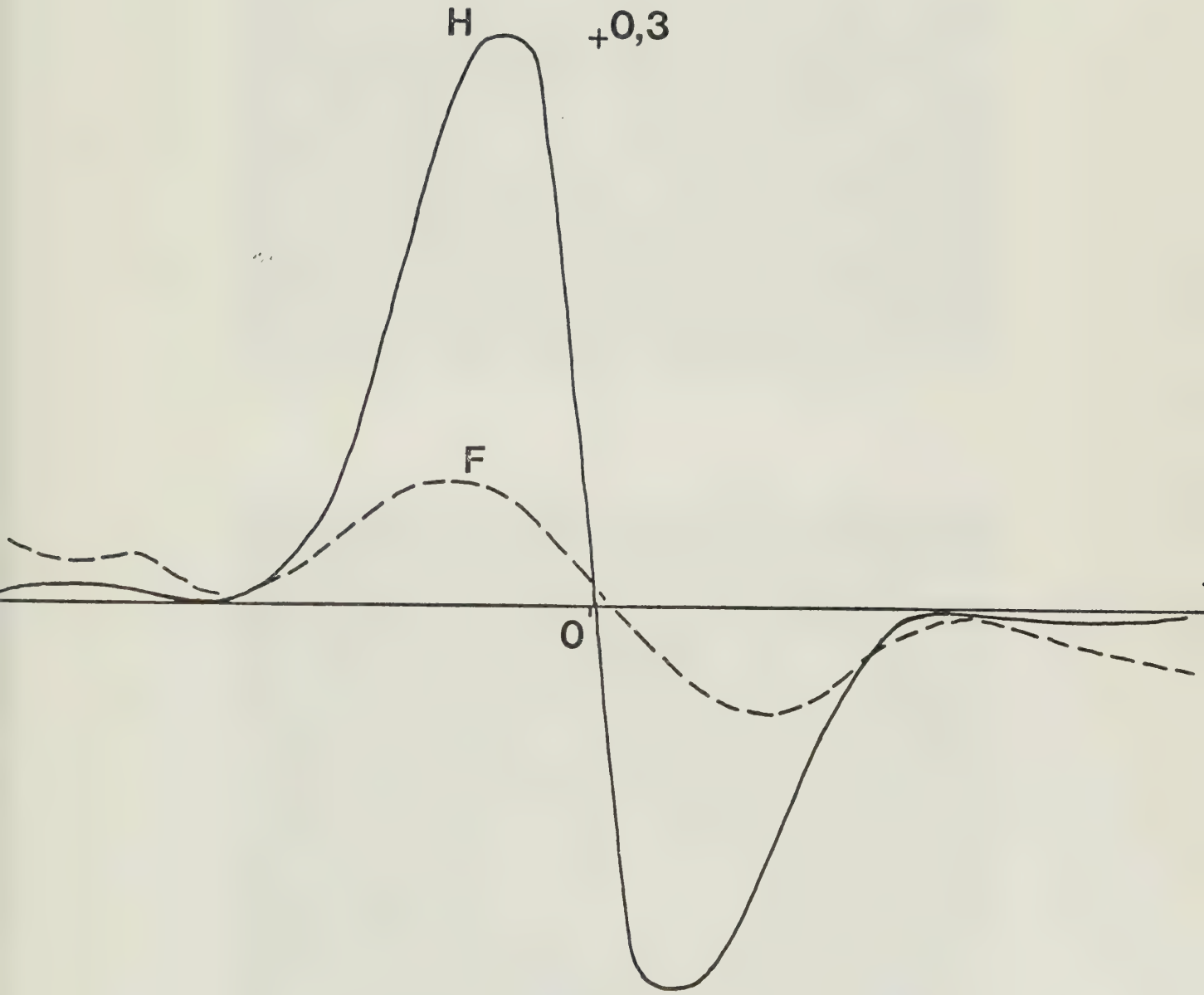
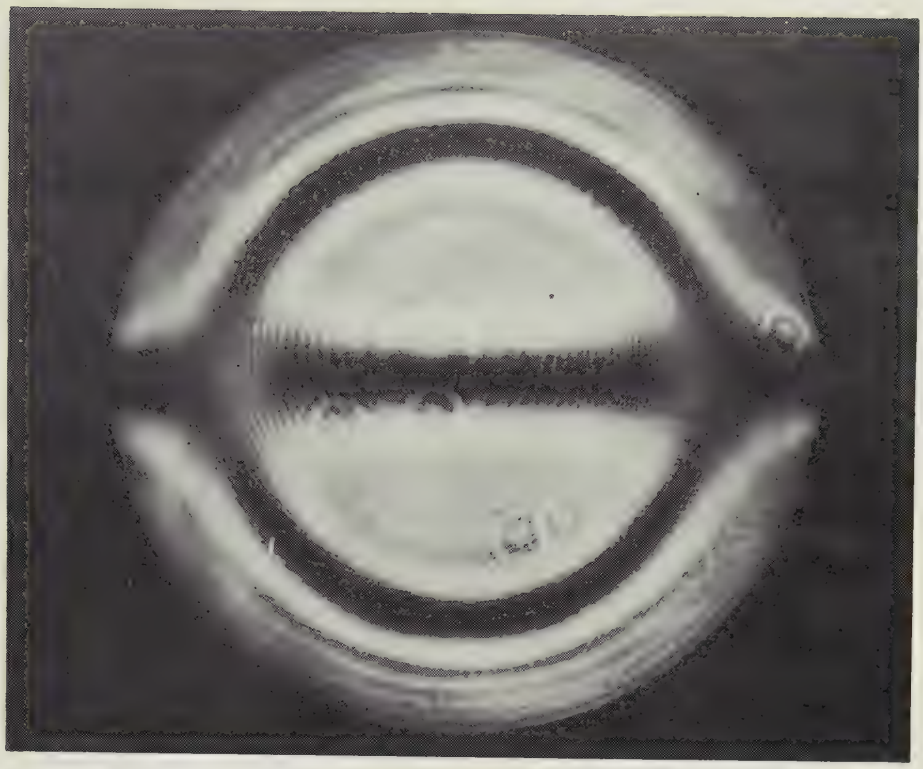


Figure 3-15 c

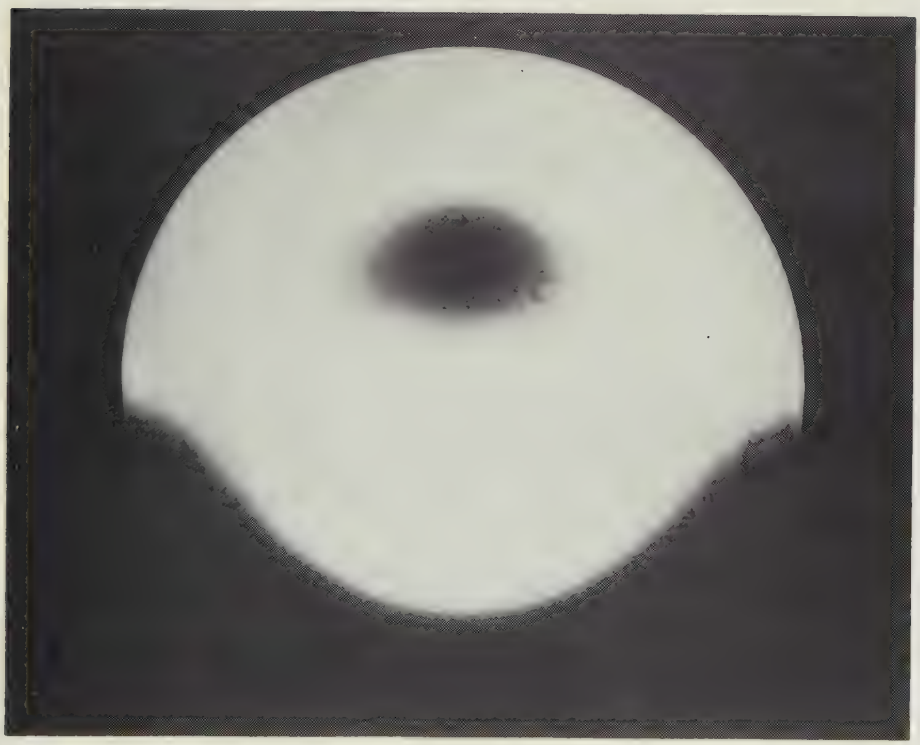


HILBERT

FOUCAULT

Figure 3-16

HILBERT



FOUCAULT

Figure 3-17

Le montage expérimental est tout à fait conforme au montage de principe et comporte (fig. 3-18) une fente source éclairée par la raie verte d'une lampe à vapeur de mercure (HBO 100) par l'intermédiaire d'un condenseur C et d'un polariseur P.

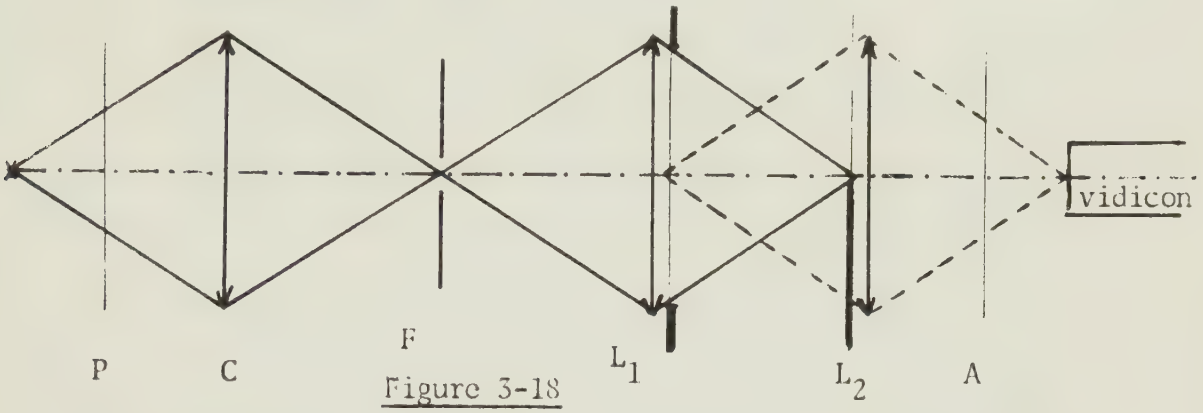
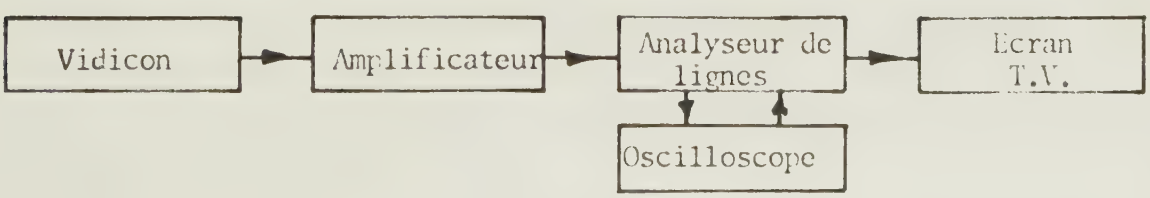


Figure 3-18

L'objet test utilisé est la surface d'onde émergent d'une lentille mince biconvexe L_1 de distance focale f_1 = 190mm travaillant pour ses points antiprincipaux et dont on sait calculer simplement l'aberration sphérique. Un objectif L_2 de distance focale f_2 = 90mm suivi d'un analyseur A forme l'image de la pupille de sortie de L_1 sur le tube vidicon d'une caméra de télévision. La pupille de sortie de L_1 est matérialisée par un diaphragme à iris qui permet de faire varier l'ouverture. Un système de télévision en circuit fermé fournit une image agrandie sur l'écran d'un récepteur.

De plus, un dispositif emprunté à Monsieur PHILBERT [21] permet de sélectionner n'importe quelle ligne sur l'écran de télévision et analyse l'éclairement lumineux sur cette ligne. En synchronisant le balayage de la télévision et celui d'un oscilloscope, on obtient la courbe d'éclairement lumineux $E(x,y_o)$ en fonction de l'abcisse x (y_o étant fixe) sur l'écran de l'oscilloscope. Dans les expériences réalisées, on a toujours centré l'image (y_o = 0).

Le diagramme du dispositif peut se représenter sous la forme ci-dessous.



...

La figure 3-19a représente l'ensemble du montage avec, d'avant en arrière :

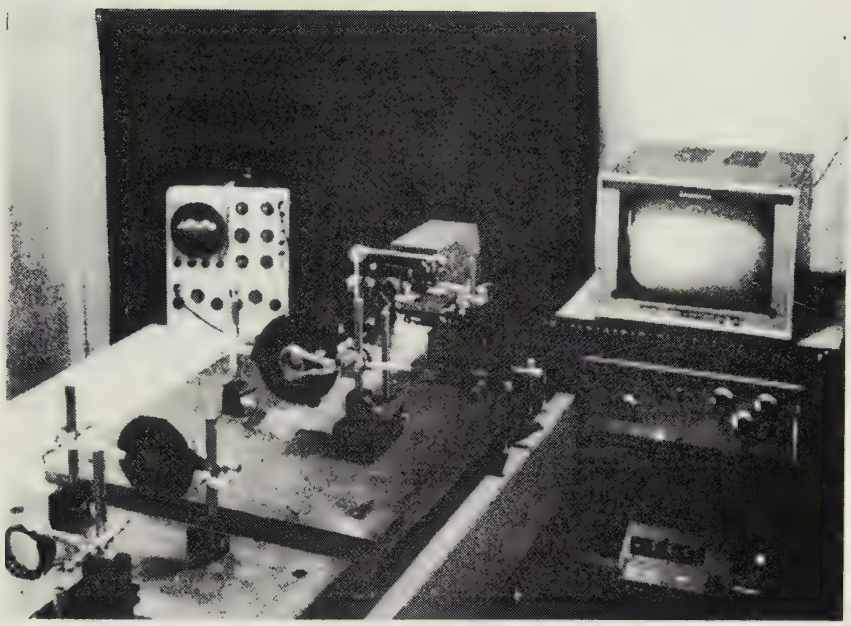
- le condenseur C
- le polariseur (qui cache la fente source)
- la lentille étudiée L_1
- le filtre, l'objectif L_2, l'analyseur, la caméra T.V.

La figure 3-19b montre en gros plan : la "lame de Kastler" (serrée dans une pince) suivie de l'objectif L_2 et de l'analyseur.

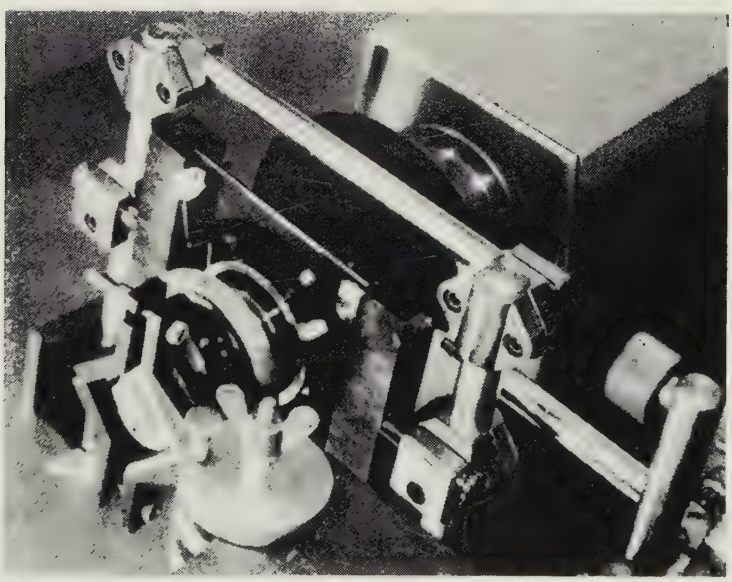
Les figures 3-20 et 3-21 (sur la partie gauche et de haut en bas) montrent les figures obtenues par la méthode de Foucault (figure 3-20) et par la méthode par transformée de Hilbert (figure 3-21) pour un couteau situé près du foyer paraxial, du meilleur foyer et du foyer marginal. Il s'agit ici d'aberrations importantes, la lentille L_1 (de 39mm de diamètre) travaillant à pleine ouverture ce qui correspond à un écart maximum à la surface d'onde de l'ordre de 10λ . La partie droite des photographies représente l'éclairement observé sur l'oscilloscope. La mauvaise qualité des images obtenues est due à la caméra dont la sensibilité n'était pas la même dans tous le champ et qui, de plus, présentait de la distorsion.

Les figures 3-22 et 3-23 sont relatives à une faible aberration de $\lambda/10$ observée par la méthode par transformation de Hilbert (figure 3-22) et par la méthode de Foucault (figure 3-23) (le diamètre d'ouverture de la lentille était fixé à $2h = 12,5mm$, ce qui correspond à un écart à la surface d'onde $\Delta = 4f\alpha'^4 = 0,056\mu$) le couteau étant décentré. Sur la figure du haut, l'arrêt du couteau passe par le premier minimum de diffraction en deçà de l'axe de la lentille, sur la figure du milieu, l'arête du couteau passe par le centre de la tache de diffraction et sur la figure du bas le couteau est centré au premier minimum au-delà de l'axe de la lentille. La qualité des images obtenues laisse nettement à désirer car, aux défauts déjà signalés du système de télévision, s'ajoutent les turbulences d'air dans le montage qui deviennent sensibles et le fait que la lentille utilisée était une lentille simple dont la qualité n'était pas suffisante.

...

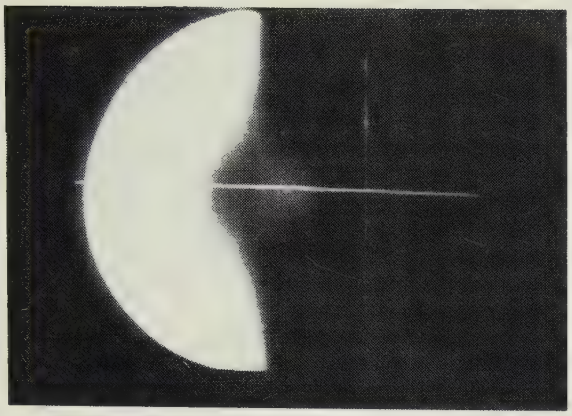


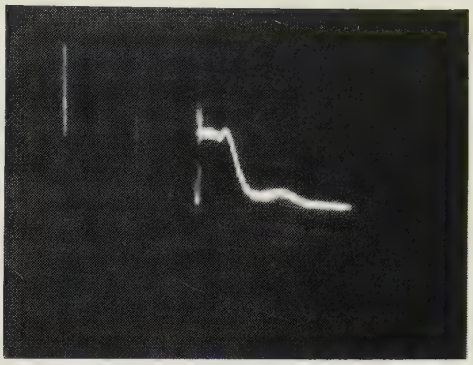
a

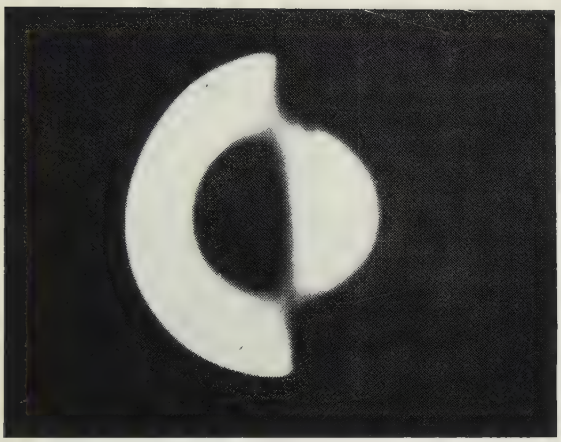


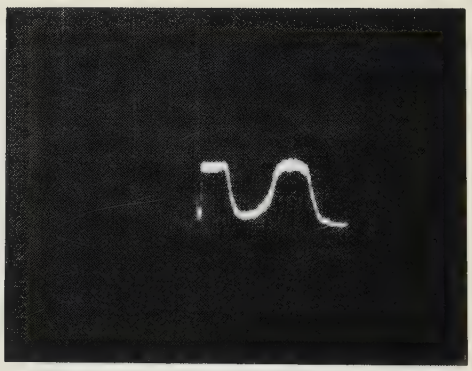
b

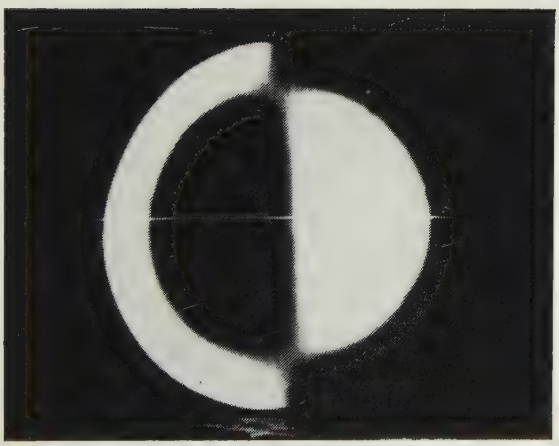
Figure 2-19











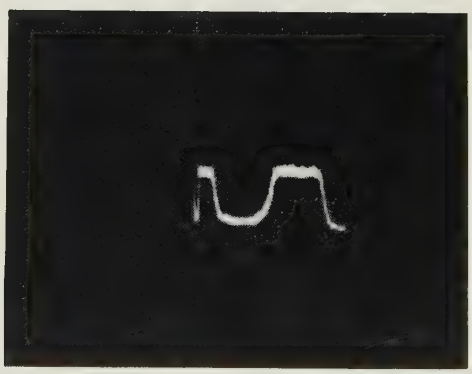


Figure 3-20

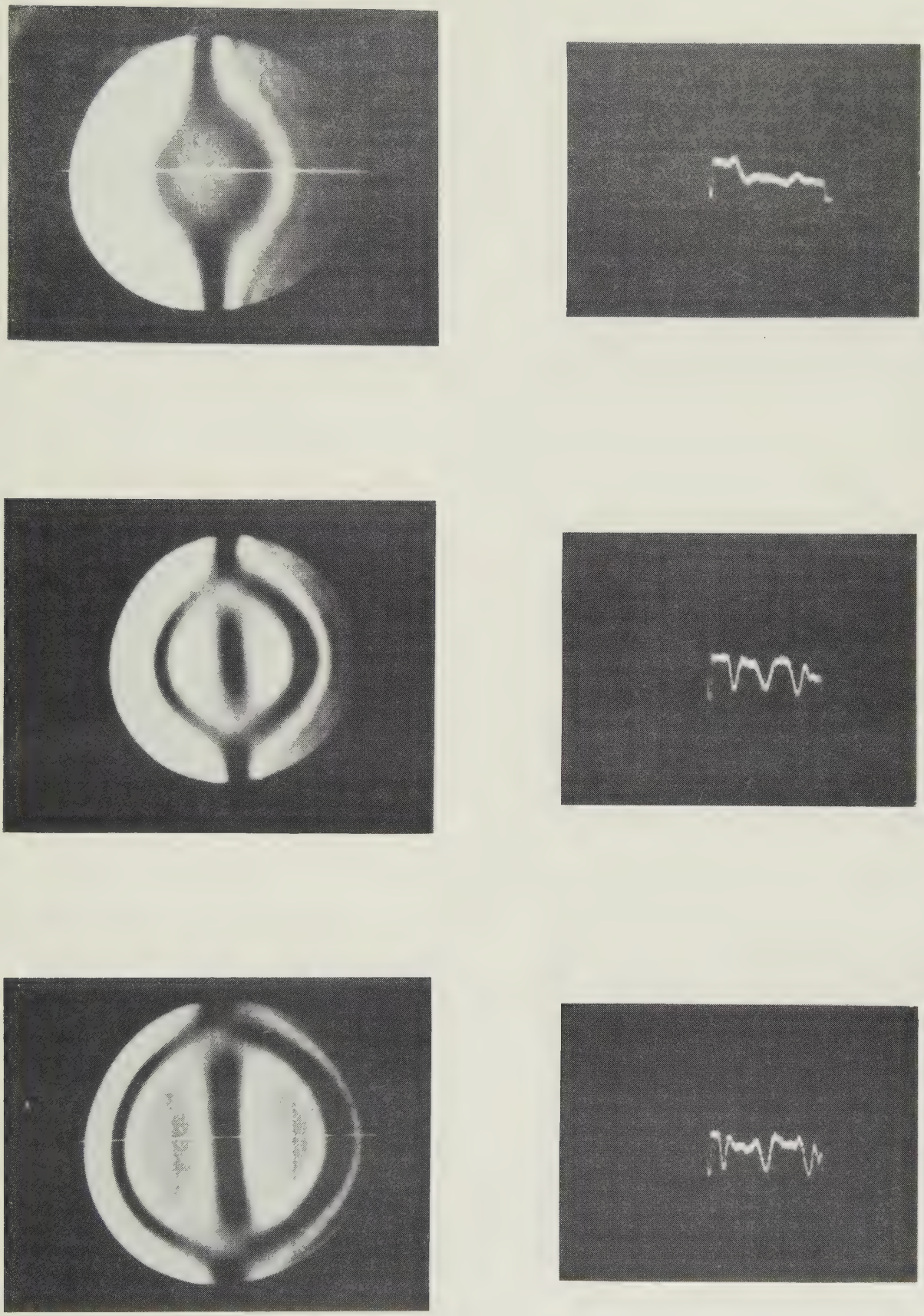


Figure 3-21

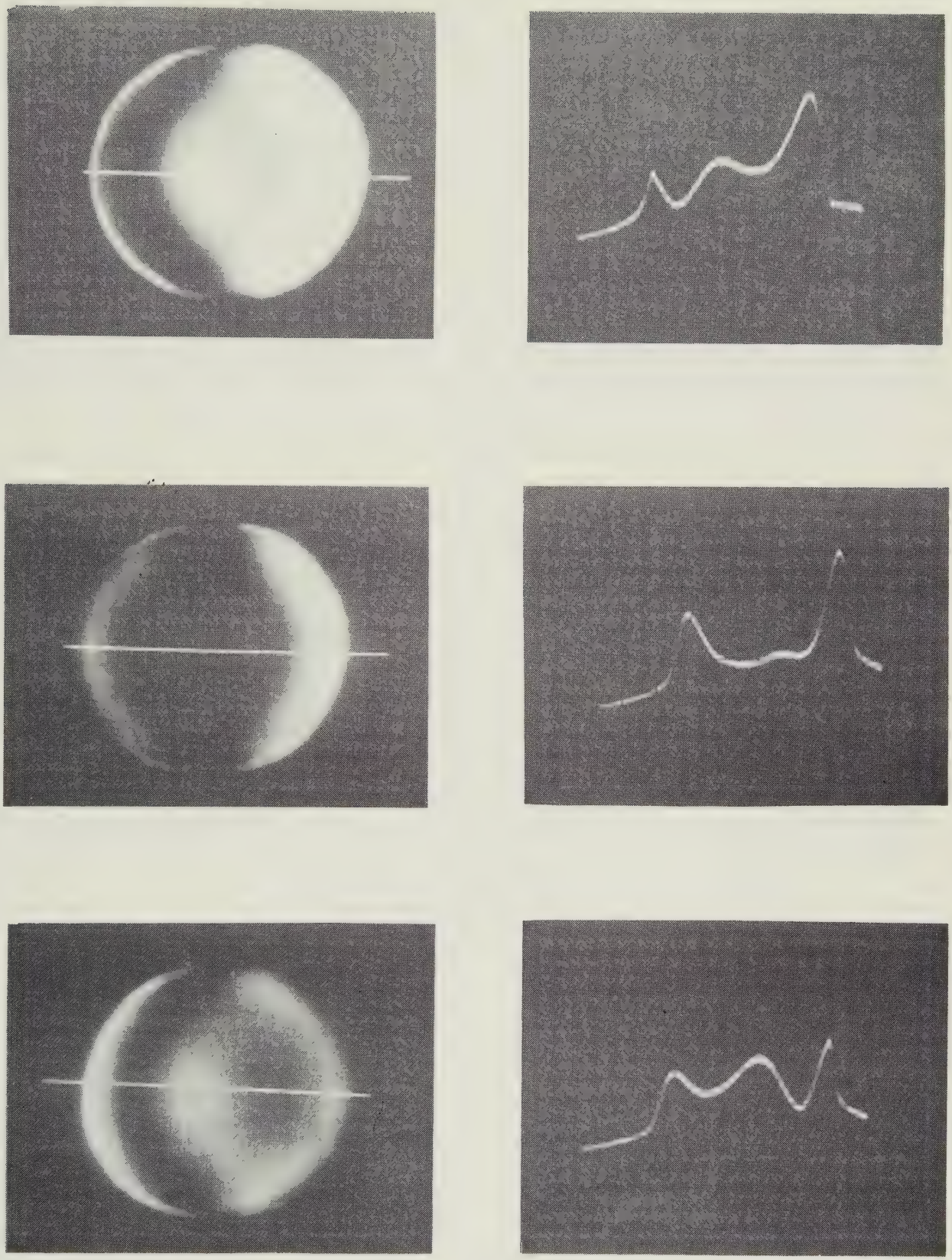


Figure 3-22

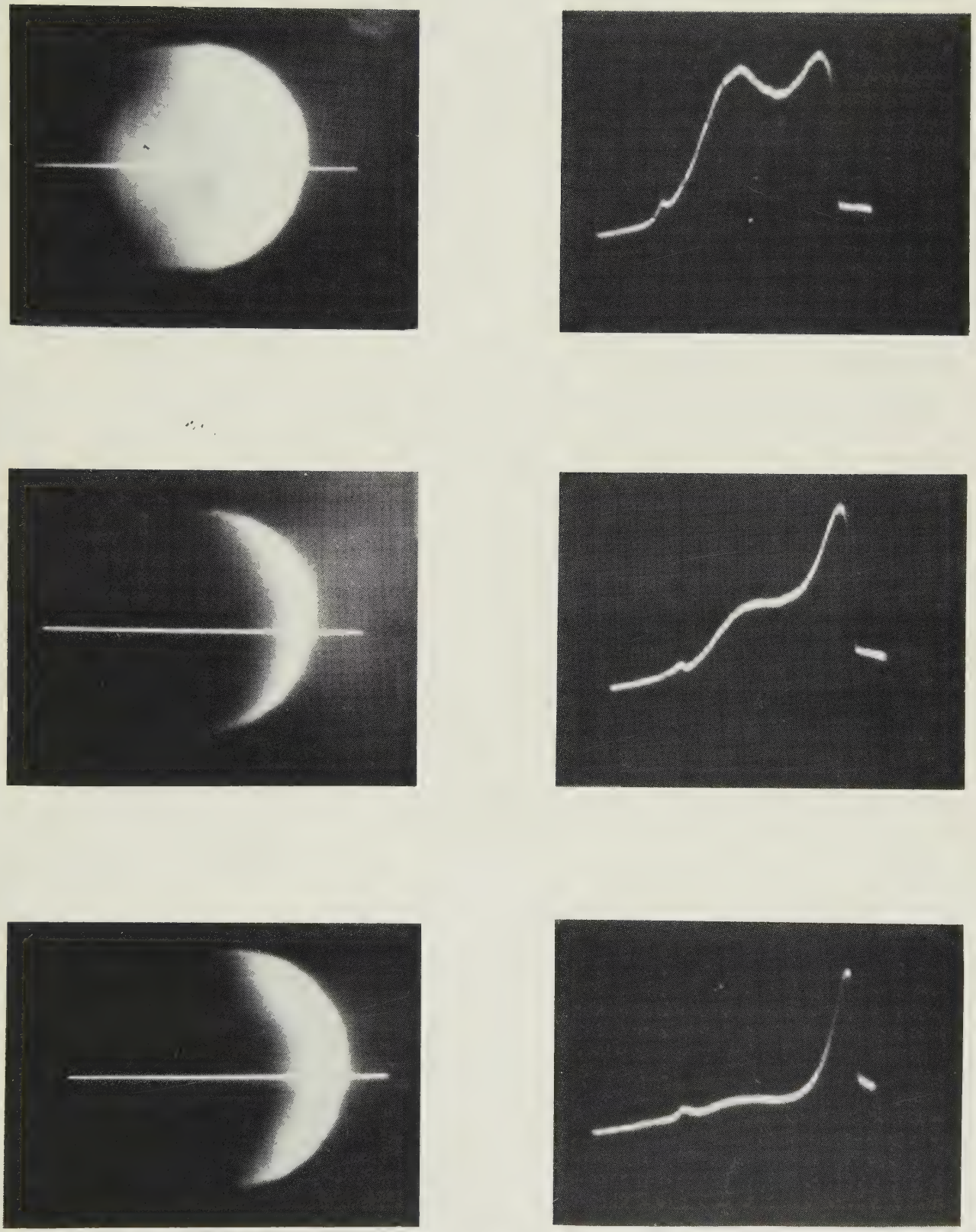


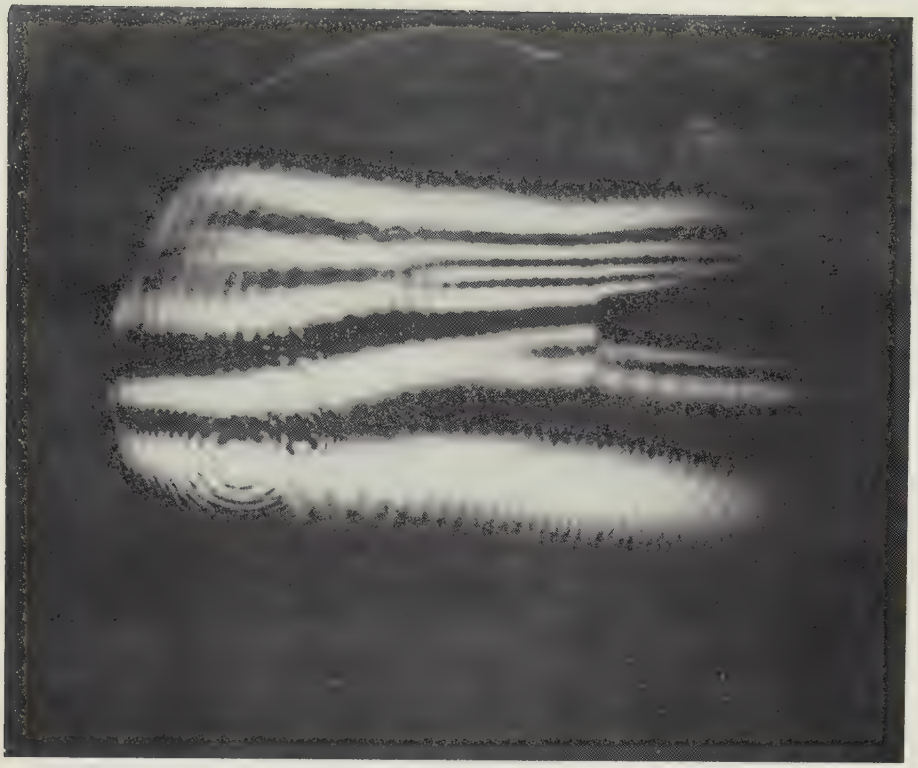
Figure 3-23

De plus, dans le cas de la méthode par transformée de Hilbert, l'arête du couteau de phase n'était pas parfaitement définie. On voit cependant que, lorsque le couteau est décentré, les variations d'éclairement sont plus nettes dans le cas de la méthode par transformée de Hilbert que dans le cas de la méthode de Foucault.

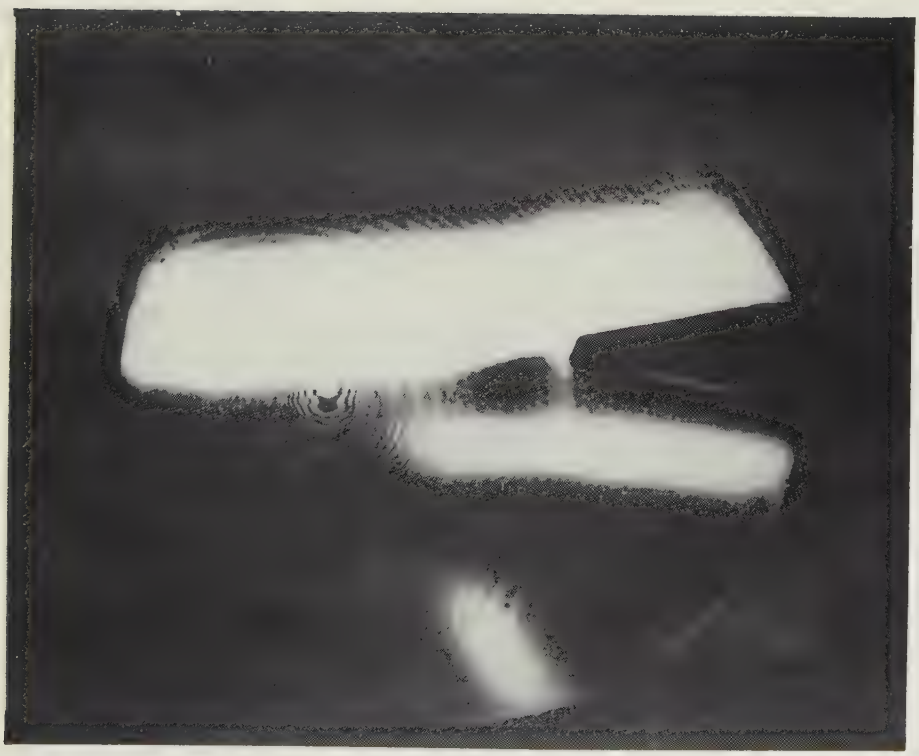
La figure 3-24 montre un volume d'air chaud observé par la méthode de Foucault et par la méthode par transformée de Hilbert.

6 - CONCLUSIONS

On a montré dans ce chapitre qu'il était possible d'utiliser la transformation de Hilbert pour l'étude de l'aberration sphérique d'un système optique (ou de tout autre bosse de phase). Les calculs réalisés sur ordinateurs ont montré que la méthode par transformée de Hilbert et la méthode de Foucault étaient en fait complémentaires. La possibilité d'adapter la transparence du "filtre de Hilbert" en fonction des différents paramètres tels que quantité de lumière parasite ou enfoncement du couteau conduit à une sensibilité plus grande de la méthode par transformée de Hilbert. Cependant, du point de vue expérimental, la réalisation d'un filtre de Hilbert parfait pose de gros problèmes. En ce qui concerne les résultats expérimentaux ceux-ci devraient être repris en utilisant des optiques spécialement polies.



HILBERT



FOUCAULT

Figure 3-24

CHAPITRE 4

LE BRUIT COHERENT ET SA REDUCTION

On a jusqu'ici supposé que la transformée de Hilbert était réalisée en utilisant une source ponctuelle. En pratique, la solution la plus simple consiste à utiliser un faisceau laser focalisé par un objectif de microscope ce qui permet d'obtenir une source de quelques microns à quelques dizaines de microns de diamètre. Cependant un tel éclairage, parfaitement cohérent, introduit un bruit important, on se propose donc, dans le présent chapitre, d'étudier la possibilité de réduire le bruit en utilisant une source partiellement cohérente.

Nous verrons qu'une source lineaire spatialement incohérente est parfaitement adaptée à l'observation de la transformée de Hilbert et nous décrirons un dispositif qui permet, à l'aide d'un miroir vibrant, de synthétiser une telle source à partir d'un laser. Cette source possède les avantages de la source incohérente en ce qui concerne le bruit et les avantages du laser en ce qui concerne la luminance.

1 - NECESSITE DE REDUIRE LE BRUIT

Suivant que la lumière parasite provenant des diffusions, des réflexions parasites sur les surfaces optiques, de la diffraction par les poussières, etc. est cohérence ou non avec le signal, le bruit introduit dans un système optique varie considérablement.

...

Soit en effet un signal d'amplitude s auquel se superpose un bruit d'amplitude b. Selon que le bruit est cohérent avec le signal ou non, l'éclairement observé est :

$$E_c = |s + b|^2 + |s|^2 + |b|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\{s^* b\} \qquad (4\text{-}1)$$

$$= S + B + B_c$$

ou $$E_i = |s|^2 + |b|^2 = S + B \qquad (4\text{-}2)$$

on voit que, dans le cas de l'éclairage cohérent, l'éclairement dû au bruit comporte un terme proportionnel à l'amplitude du bruit (exp. 4-1) alors que, dans le cas de l'éclairage incohérent, cet éclairement est proportionnel au carré de l'amplitude du bruit (exp. 4-2).

A titre d'exemple et pour montrer l'importance considérable de ce phénomène la figure 4-1 représente, à l'échelle, l'éclairement effectivement observé sur une plage uniforme lorsque la puissance de bruit est égale à 4% de la puissance du signal, dans le cas où le bruit est cohérent avec le signal et dans le cas où il n'est pas cohérent avec le signal

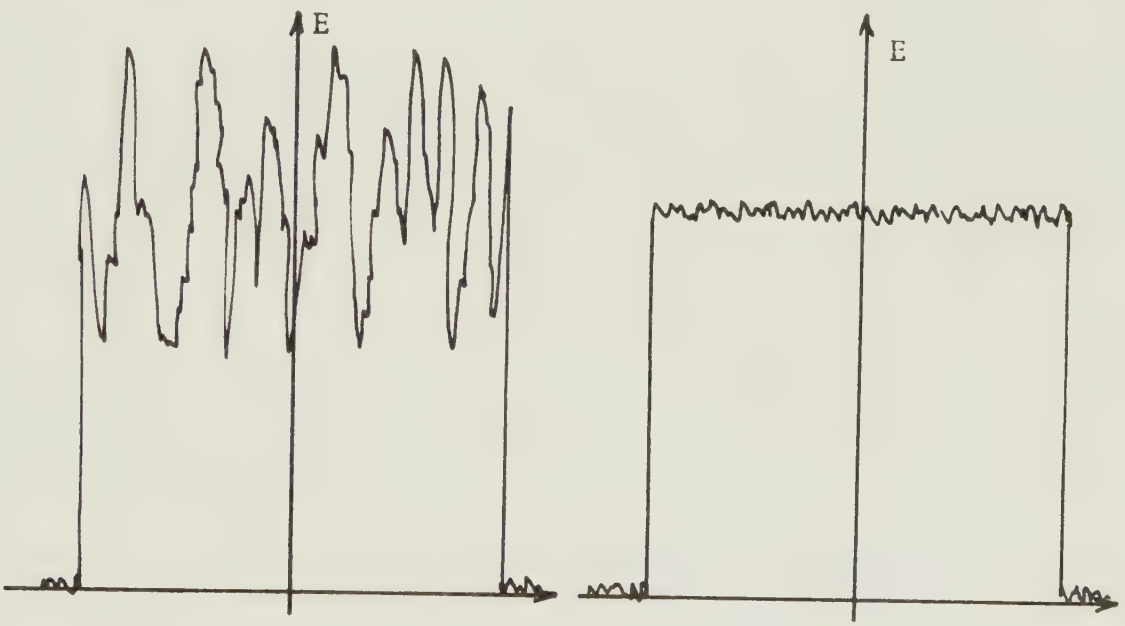


Figure 4-1

...

La figure 4-2 montre la photographie d'un même objet observé à l'aide d'un microscope à contraste de phase éclairé par un laser (figure 4-2a) ou par une lampe auto (figure 4-2b), éclairage d'origine du microscope Nachet utilisé. L'objet très nettement visible sur la figure 4-2b est à peine discernable sur la figure 4-2a.

Ces deux exemples illustrent les difficultés que l'on éprouve à utiliser un laser, et l'on a fréquemment intérêt à utiliser une source classique du type lampe à arc au mercure (HBO 100) ou haute pression (HP 125) ou encore arc au zinconium, dont les luminances atteignent des valeurs très élevées. On est cependant parfois dans l'obligation d'utiliser un laser et ceci nous a conduit à mettre au point un dispositif à miroir vibrant aui permet de synthétiser une source linéaire partiellement cohérente du point de vue spatial. En effet, comme nous allons le voir, l'utilisation d'une source rectiligne parallèle au filtre de Hilbert ne change rien quant à l'observation de la transformée de Hilbert, mais permet de diminuer considérablement le bruit.

2 - TRANSFORMATION DE HILBERT OBSERVEE EN ECLAIRANT PAR UNE FENTE INCOHERENTE

Si l'on utilise une fente qui, ramenée dans le plan spectral a pour dimensions Δu et Δv pour éclairer le montage à double diffraction donnant la transformée de Hilbert (figure 4-3) on est conduit à effectuer un calcul de cohérence partielle et l'on trouve que l'éclairement dans le plan π conjugué du plan π_o est

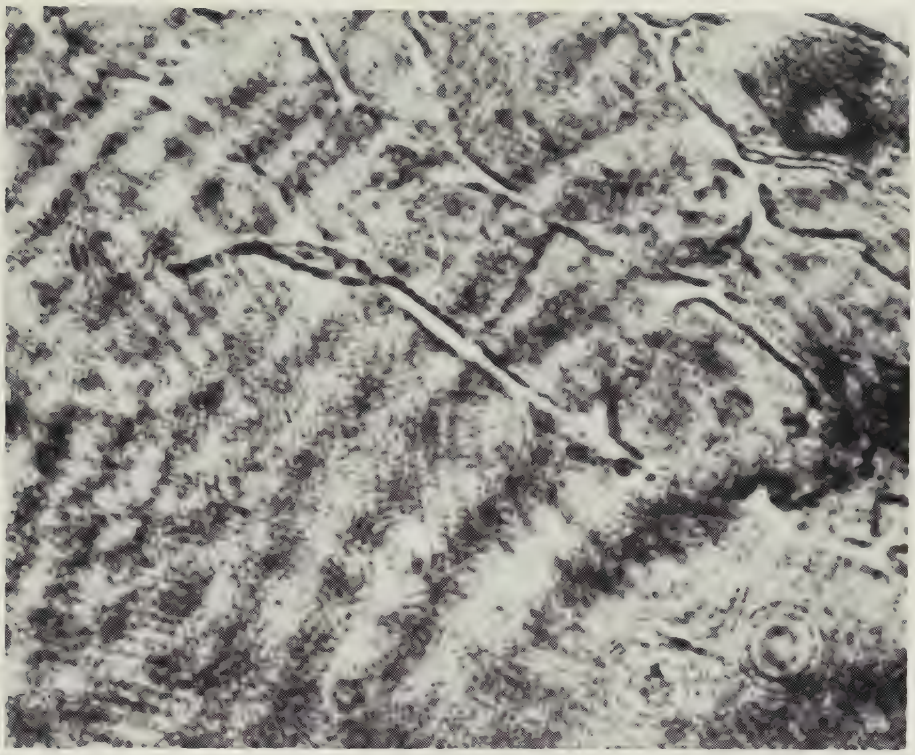
$$E = \int f(M_1)\, \overset{*}{f}(M_2)\, h(M-M_1)\, \overset{*}{h}(M-M_2)\, J(M_2-M_1)\, dM_1 dM_2 \qquad (4\text{-}3)$$

où l'on voit apparaitre explicitement le degré de cohérence partielle entre les points M_1 et M_2 :

$$J(M_2 - M_1) = \int_{\text{source}} s(\Omega_o)\, e^{i2\pi\Omega_o (M_2-M_1)}\, d\Omega_o \qquad (4\text{-}4)$$

Ω_o (u_o, v_o) étant le point courant de la source dont la répartition de luminance est $s(\Omega_o)$.

...



a

b

Figure 4-2

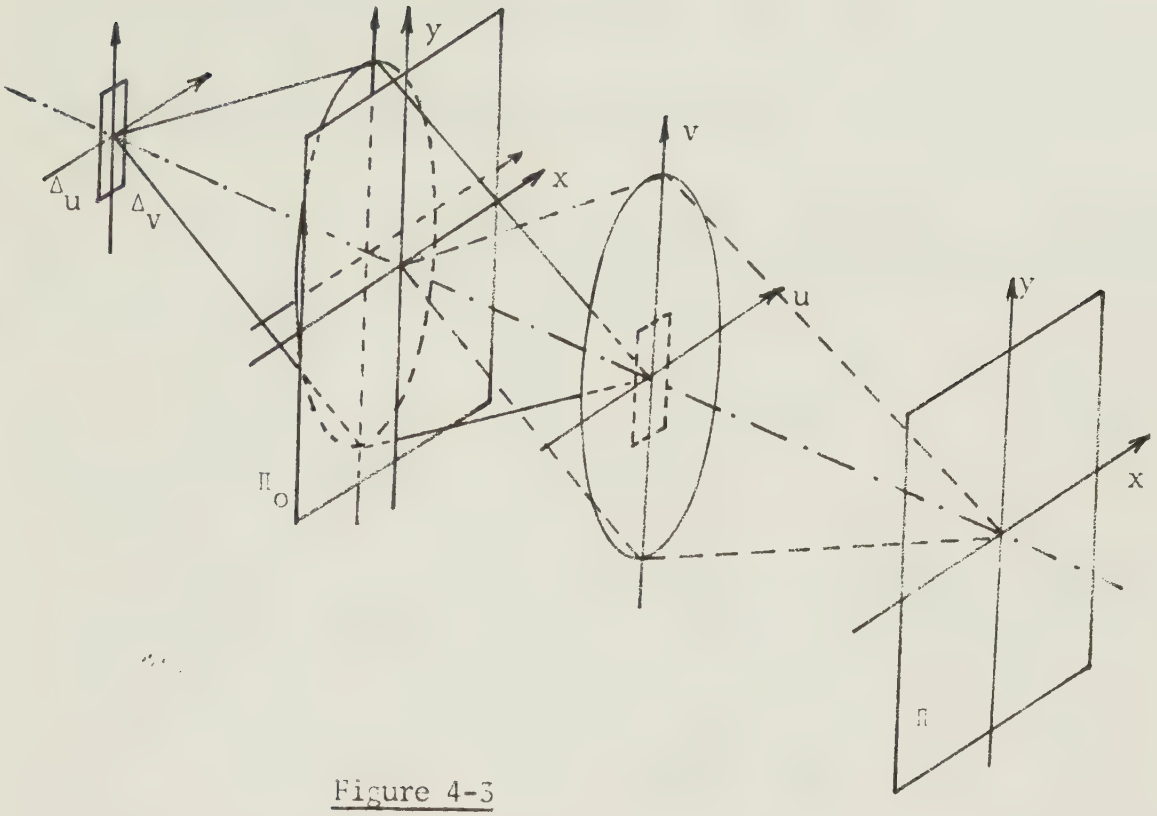


Figure 4-3

Si le montage est éclairé par une source rectangulaire de dimensions Δu et Δv que nous supposons de luminance uniforme pour simplifier les calculs, le degré de cohérence partielle prend la forme

$$J(x_2-x_1, y_2-y_1) = \Delta u\, \Delta v \, \frac{\mathrm{Sin}\pi\, \Delta u(x_2-x_1)}{\pi\, \Delta u(x_2-x_1)} \cdot \frac{\mathrm{Sin}\pi\, \Delta v(y_2-y_1)}{\pi \Delta v(y_2-y_1)} \qquad (4\text{-}5)$$

Dans le cas d'une source ponctuelle $\Delta u = \Delta v \longrightarrow 0$

$$J\,(x_2 - x_1\,,\, y_2 - y_1) = J\,(0,0) = 1 \qquad (4\text{-}6)$$

et l'expression (4-5) s'écrit :

$$E = \int f\,(M_1)\; f^*(M_2)\; h\,(M - M_1)\; h^*(M - M_2)\; dM_1 dM_2$$

$$E = |f(M) * h\,(M)|^2 \qquad (4\text{-}7)$$

...

On retrouve le cas de l'imagerie parfaitement cohérente.

Cas d'une fente infiniment fine, parallèle à Oy

Dans le montage d'observation de la transformée de Hilbert, le filtre que nous utilisons est un filtre à une seule dimension et la réponse percussionnelle peut s'écrire :

$$h(x,y) = h_x(x) \cdot h_y(y) = h_x(x) \cdot \delta(y) \qquad (4\text{-}8)$$

si nous supposons le plan spectral illimité.

Dans le cas d'une fente infiniment fine, parallèle à Oy et de longueur Δv, le degré de cohérence partielle (4-5) devient

$$J(0, y_2 - y_1) = \Delta v \frac{\sin \pi \Delta v (y_2 - y_1)}{\pi \Delta v (y_2 - y_1)} \qquad (4\text{-}9)$$

$$E = \iiiint f(x_1 y_1) f^*(x_2 y_2)\, h_x(x-x_1)\, h_x^*(x-x_2)\, \delta(y-y_1)\, \delta(y-y_2)\, J(0, y_2-y_1)\, dx_1\, dx_2\, dy_1\, dy_2 \qquad (4\text{-}10)$$

Soit après intégration en y_1 et y_2 :

$$E = \iint f(x_1,y)\, f^*(x_2,y)\, h_x(x-x_1)\, h_x^*(x-x_2)\, dx_1 dx_2$$

$$= |f(x,y) \underset{x}{*} h_x(x)|^2 \qquad (4\text{-}11)$$

On obtient donc le même résultat qu'en éclairage parfaitement cohérent quelle que soit la dimension de la fente suivant la direction y. Par contre, l'utilisation d'une telle source, spatialement incohérente suivant la direction y, permet d'augmenter considérablement le rapport signal sur bruit observé dans le plan image, comme nous le verrons au paragraphe suivant.

...

Il faut remarquer que le résultat que nous venons d'obtenir n'a rien de paradoxal, il est dû au fait que, dans le cas d'une pupille infinie uniformément transparente, l'éclairement image obtenu est le même, que l'éclairage soit cohérent, incohérent ou même partiellement cohérent.

En effet

$$|f(M) * \delta(M)|^2 = |f(M)|^2 = |f(M)|^2 * |\delta(M)|^2$$

3 - ETUDE DU RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT

La pupille du montage utilisée étant obligatoirement de dimensions finies, on se trouve dans le cas de la cohérence partielle. Cependant, afin d'allèger les calculs, on va faire un certain nombre d'approximations et d'hypothèses parfaitement raisonnables dans le cas qui nous occupe :

- En ce qui concerne l'image, nous supposerons la pupille illimitée. En effet, nous nous occupons d'objets de basses fréquences spatiales et, pour ceux-ci, la pupille peut être considérée comme illimitée.

- En ce qui concerne le bruit, par contre, nous considérerons la limitation de la pupille et nous supposerons que ce bruit est un bruit complexe gaussien, centré, dont les parties réelles et imaginaires ont la même loi de probabilité, mais sont non correlées. On a alors, si $A_B = \xi + i\eta$ est l'amplitude du bruit :

$$< \xi\eta > = 0 \qquad \sigma_\xi^2 = \sigma_\eta^2 \tag{4-12}$$

On définira le rapport signal sur bruit par

$$R = \frac{E_T(M)}{\sigma_{E_T}} \tag{4-13}$$

où E_T est l'éclairement total dans le plan image et σ_{E_T} l'écart type.

...

L'éclairement étant proportionnel à la dimension Δv de la source l'expression (4-13) peut encore s'écrire :

$$R = \frac{E_o(M)\ \Delta v}{\sigma_{E_T}} \tag{4-14}$$

Pour un point d'ordonnée v de la source, l'amplitude dans le plan image est

$$A\ (M,v) = A_S\ (M,v) + A_B(M,v) \tag{4-15}$$

où A_S représente l'amplitude du signal et A_B l'amplitude du bruit, cohérent avec A_S.

En ce qui concerne l'amplitude signal, on a

$$A_S(M,v) = A_S(M)\ e^{i2\pi vy} \tag{4-16}$$

L'éclairement dans le plan image, dû à un petit élément de source dv, est :

$$dE = \left[|A_S(M)|^2 + |A_B(M,v)|^2 + A_S^* A_B + A_S A_B^* \right] dv$$

$$= \left[|A_S|^2 + A_S^* A_B + A_S A_B^* \right] dv$$

Si on néglige $|A_B|^2$ qui est un infiniment petit du second ordre lorsque l'amplitude de bruit est petite comparée à l'amplitude du signal.

L'éclairement total est :

$$E_T = E_o(M)\ \Delta v + Y(M) = \langle E_T \rangle + Y(M) \tag{4-17}$$

où $E_o(M)\,\Delta v = \langle E_T \rangle$ est l'éclairement total dû au signal, égal à l'éclairement moyen puisque le bruit est centré, et où

$$Y(M) = \int (A_S A_B^* + A_B A_S^*)\, dv = \int X(M,v)\, dv \tag{4-18}$$

représente l'éclairement dû au bruit d'intermodulation amplitude signal-amplitude de bruit.

...

L'écart quadratique moyen de l'éclairement total est

$$\sigma^2 = \langle |E_T - \langle E_T \rangle|^2 \rangle = \langle Y^2 \rangle \qquad (4\text{-}19)$$

$$\sigma^2 = \langle Y^2 \rangle = \left\langle \int \text{rect}\,\frac{v_1}{\Delta v}\ \text{rect}\,\frac{v_2}{\Delta v}\ X(M,v_1)\ X^*(M,v_2)\,dv_1 dv_2 \right\rangle$$

$$= \int \text{rect}\,\frac{v_1}{\Delta v}\ \text{rect}\,\frac{v_2}{\Delta v}\ \Phi_X(v_1,v_2)\,dv_1 dv_2 \qquad (4\text{-}20)$$

$\Phi_X(v_1 v_2)$ est la fonction d'autocorrélation de $X(M,v)$

$$\Phi_X(v_1,v_2) = \langle X(M,v_1).X^*(M,v_2) \rangle \qquad (4\text{-}21)$$

Calculons $\Phi_X(v_1,v_2)$

$$\Phi_X(v_1,v_2) = \langle (A_{S1}A^*_{B1} + A^*_{S1}A_{B1})(A^*_{S2}A_{B2} + A_{S2}A^*_{B2}) \rangle$$

$$= \langle A_{S1}A^*_{S2} \cdot A^*_{B1}A_{B2} \rangle + \text{c.c.}$$

$$+ \langle A_{S1}A^*_{B1} . A_{S2}A^*_{B2} \rangle + \text{c.c.} = Z_1 + \text{c.c.} + Z_2 + \text{c.c.}$$

$$Z_1 = |A(M)|^2\, e^{-2i\pi y(v_2-v_1)}\, \langle A^*_{B1} . A_{B2} \rangle$$

$$= E_o(M)\, e^{-i2\pi y(v_2-v_1)}\, \Phi_B(v_2-v_1)$$

où Φ_B est la fonction d'autocorrélation du bruit.

Pour calculer Z_2, posons $A_B = \xi + i\eta$

$$Z_2 = A_{s1}A_{s2} \langle (\xi_1 - i\eta_1)\ (\xi_2 - i\eta_2) \rangle = 0$$

car $\langle \xi_1 \xi_2 \rangle = \langle \eta_1 \eta_2 \rangle$ et $\langle \xi_1 \eta_2 \rangle = \langle \xi_2 \eta_1 \rangle = 0$

d'où $\sigma^2 = E_o(M) \int \text{rect}\,\frac{v_1}{\Delta v}\ \text{rect}\,\frac{v_2}{\Delta v}\ \Phi_B(v_2-v_1) e^{i2\pi y(v_2-v_1)}\,dv_1 dv_2 + \text{c.c.}$

En général, dès que la source n'est pas très petite, Φ_B est très étroit comparé à $\text{rect}\,\frac{v}{\Delta v}$ et $\Phi_B \simeq K\delta(v_2-v_1)$

d'où:

$$\sigma^2 \simeq 2\,K\,E_o \Delta v \qquad (4\text{-}22)$$

...

Il en résulte que le rapport signal sur bruit est proportionnel à $\sqrt{\Delta\nu}$:

$$R = \frac{E_o \Delta\nu}{\sigma} = \frac{E_o \Delta\nu}{\sqrt{2kE_o \Delta\nu}} = \sqrt{\frac{E_o \Delta\nu}{2k}} \qquad (4\text{-}23)$$

Pour augmenter le rapport signal sur bruit, on aura donc intérêt à prendre une source linéaire parallèle à Oy la plus longue possible, compte tenu des conditions expérimentales.

En ce qui concerne la constante K, elle dépend de la nature statistique et des origines du bruit, lesquelles varient avec chaque montage (diffusion par les éléments de la chaine optique, réflexions parasites, diffractions par les bords d'écran). Cette constante ne peut être explicitée, on peut seulement tenter de l'évaluer a postériori pour chaque expérience. On a l'équivalent de la constante de la loi de Selvin dans le cas du bruit photographique.

4 - REALISATION PRATIQUE D'UNE SOURCE LINEAIRE DE GRANDE LUMINANCE

Afin de profiter de la très grande luminance du laser tout en obtenant un éclairage spatialement incohérent, nous avons imaginé un dispositif à miroir vibrant permettant de synthétiser une telle source.

La figure 4-4 montre le schéma d'utilisation dans le cas d'un montage par réflexion utilisé pour observer la transformée de Hilbert. Le miroir vibrant m est placé de telle sorte que l'image S qu'il donne du trou source S_o soit située au voisinage du centre du miroir concave M, l'image S' de S se formant sur la ligne de séparation du "filtre de Hilbert".

...

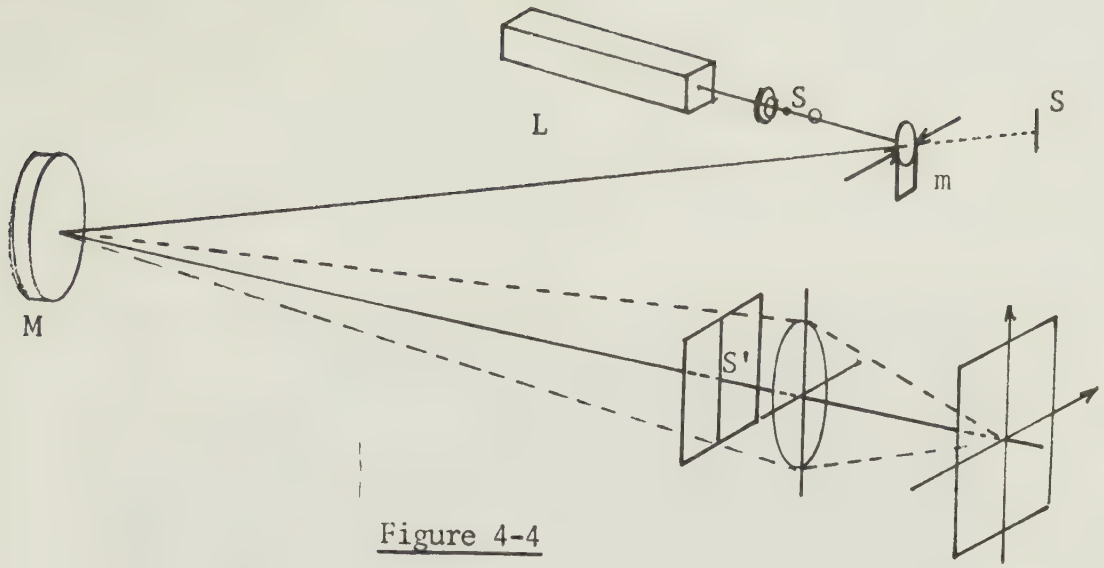


Figure 4-4

La figure 4-5 montre le système vibrant réalisé au laboratoire. On voit très nettement le principe de fonctionnement : le miroir, supporté par deux pivots, est excité par l'intermédiaire d'une lame élastique en acier, par un électro-aimant alimenté sous une tension de quelques dizaines de volts à la fréquence du secteur. Ce dispositif très simple peut être utilisé avec tous les montages utilisant des filtres unidimensionnels tels que les montages de contraste de phase à couteau, montages de Foucault, etc...

A condition de bien régler la pression des pivots, l'image obtenue est parfaitement rectiligne, comme on peut le voir sur la figure 4-6a. Si la pression des pivots n'est pas bonne, ou si la tension d'alimentation est trop forte, il se peut que le point lumineux ne suive pas le même trajet à l'aller et au retour, il décrit alors une courbe fermée, telle que celle photographiée sur la figure 4-6b. Pour supprimer ce type de défauts, il serait souhaitable d'utiliser des pivots montés sur rubis.

La figure 4-7 montre l'amélioration apportée par le dispositif à miroir dans le das d'un système optique comportant un certain nombre de surfaces présentant des poussières ou des rayures. Les figures 4-7a (miroir au repos) et 4-7b (miroir vibrant) sont à rapprocher de la figure 4-1.

...

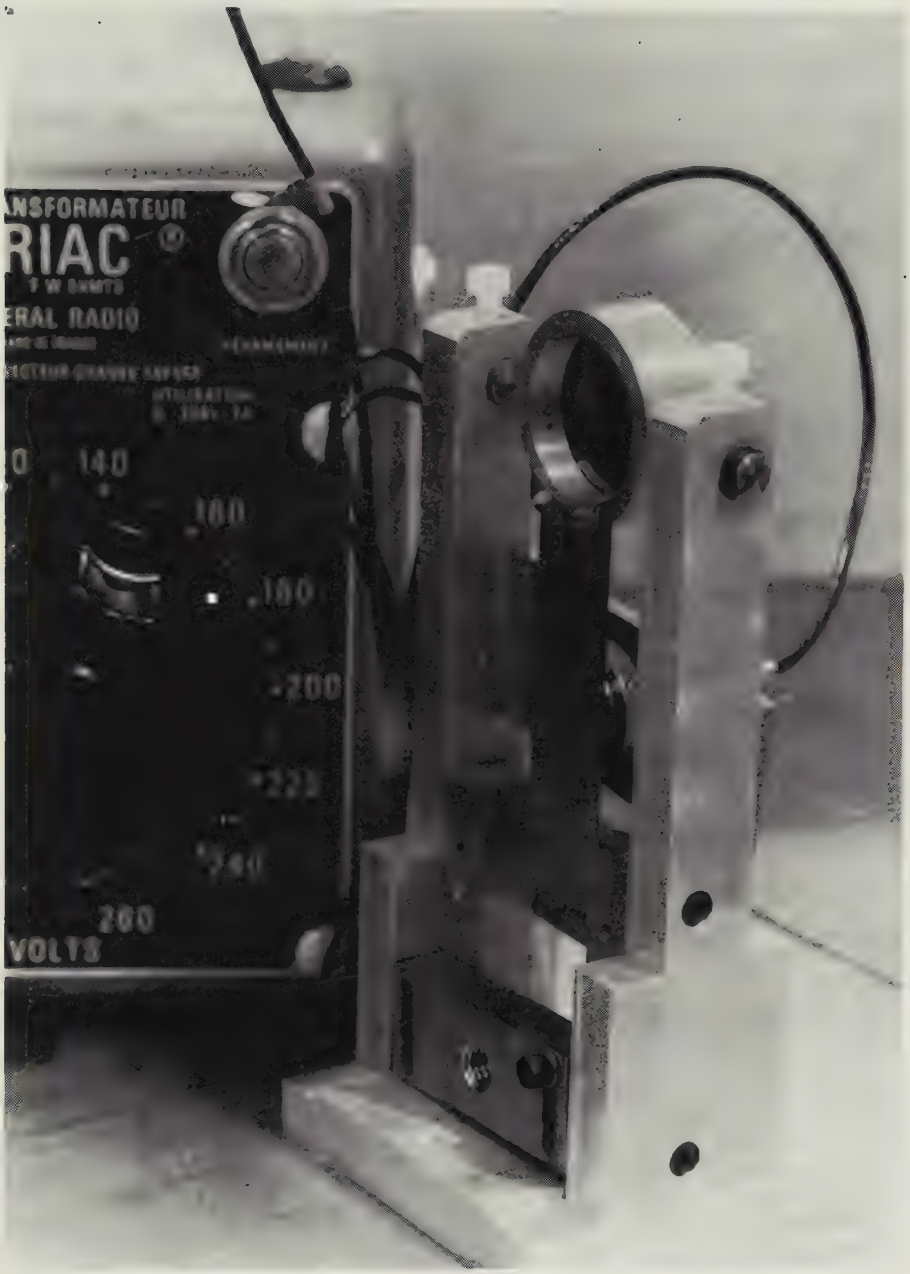
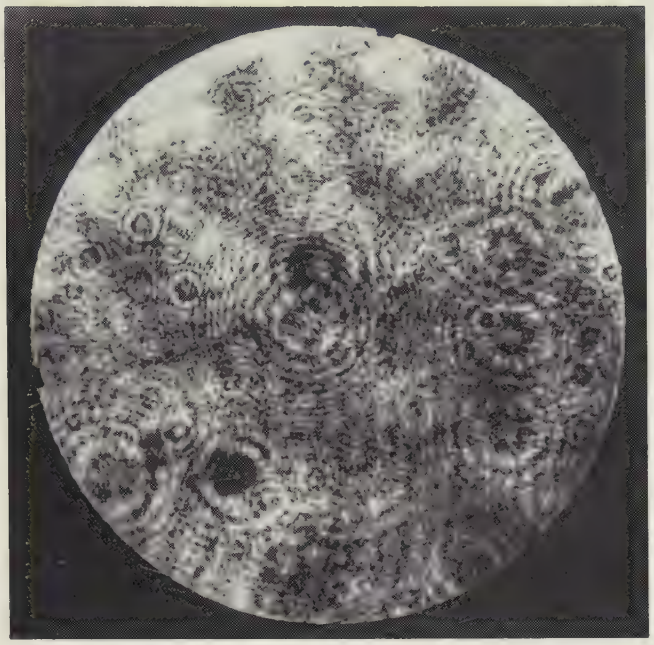

NSFORMATEUR
RIAC
ERAL RADIO
140
160
180
200
220
240
260
VOLTS

Figure 4-5

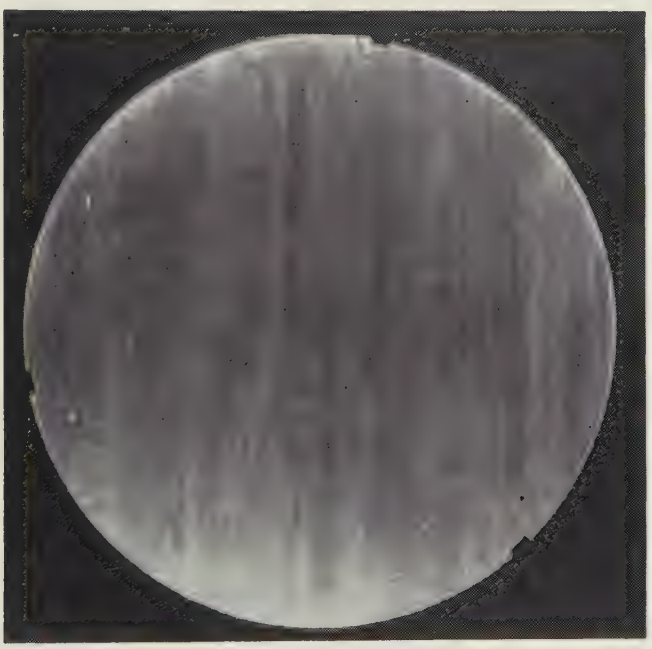
a

b

Figure 4-6



a



b

Figure 4-7

CHAPITRE 5

TRANSFORMEE DE HILBERT EN LUMIERE BLANCHE

On a vue que l'utilisation de filtres déphasants réalisés par évaporation sous vide présentait un certain nombre de difficultés, en particulier en ce qui concerne la réalisation de la couche déphasante, car celle-ci doit être bien homogêne, à bord net et ne pas présenter de craquelures (figure 2-1). De plus, elle doit présenter une épaisseur optique bien définie, toute erreur de déphasage introduisant une dissymétrie dans le plan image, comme l'a montré l'étude du § 3 au chapitre 2. En outre, une telle lame réalisée par dépôt sous vide ne peut être utilisée que pour une seule longueur d'onde.

Nous décrivons ici un filtre qui permet, par simple rotation d'un analyseur, d'observer la transformée de Foucault d'un objet, sa transformée de Hilbert ou l'objet lui-même {22}. De plus, cette lame constitue un filtre achromatique et les observations peuvent avoir lieu en lumière blanche {23}.

1 - LAME DE HILBERT BIREFRINGENTE

On utilise une double lame en quartz déjà décrite et employée par A. KASTLER pour obtenir des franges de diffraction à grand contraste {20} . Celle-ci est constituée de deux lames biréfringentes accolées et dont les lignes neutres font un angle 2α . Cette double lame est placée dans le plan spectral du montage. On a représenté sur la figure 5-1 le cas d'un montage par transmission.

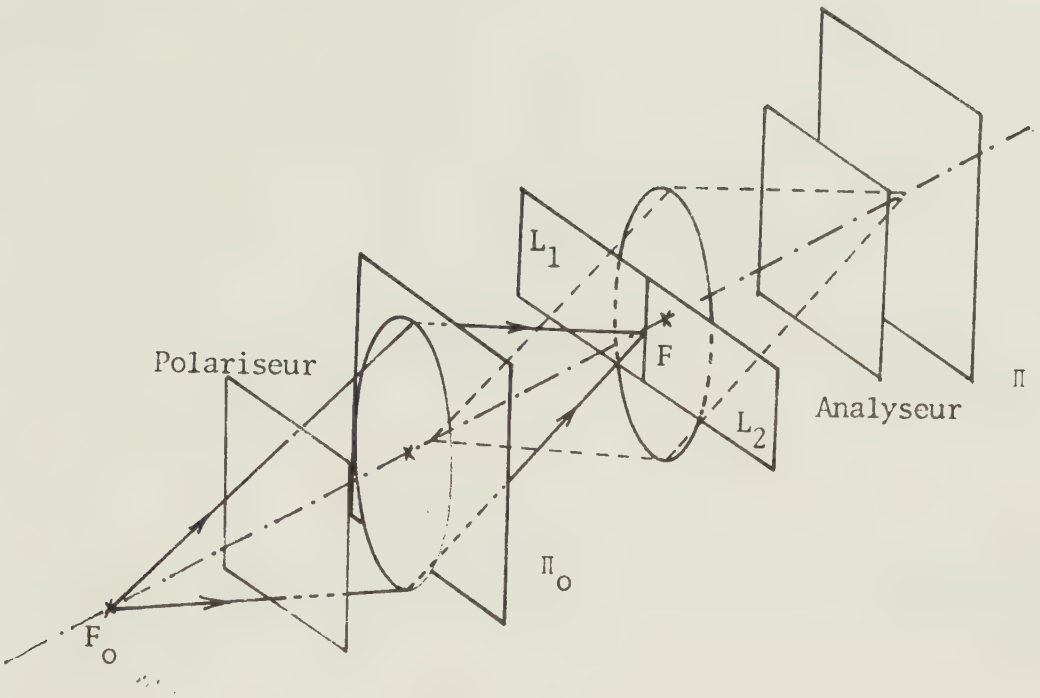


Figure 5-1

On forme en F l'image d'une fente Fo sur la ligne de séparation des deux lames biréfringentes L_1 et L_2.

Si l'on choisit convenablement les directions du polariseur et de l'analyseur par rapport aux lignes neutres des deux demi-lames, les vibrations émergentes ayant traversé L_1 et L_2 peuvent être :

a) en phase, on obtient alors en Π l'image de $Π_o$

b) en opposition de phase, ce qui revient à introduire un filtre déphasant de 180° les fréquences spatiales négatives par rapport aux fréquences spatiales positives, on obtient la transformée de Hilbert de l'objet ;

c) telles que l'une des vibrations est éteinte, on obtient le foucaultgramme.

2 - ETUDE THEORIQUE

Considérons un système d'axes Ox, Oy tel que Oy soit disposé suivant la bissectrice des axes rapides R_1 et R_2 et lents L_1 et L_2 (figure 5-2)

...

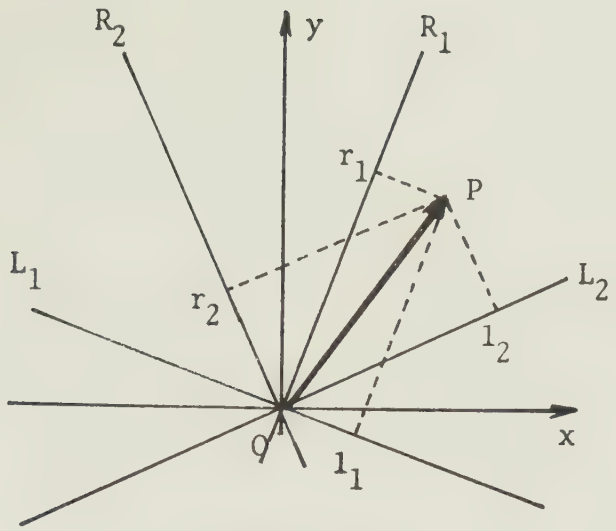


Figure 5-2

Une vibration rectiligne incidente $\overrightarrow{OP}$ de composantes x et y se trouve transformée par la lame L_1 en une vibration émergente $\vec{V}_1\ (x_1, y_1)$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = M(\phi,\alpha) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}1)$$

avec

$$M(\phi,\alpha) = \begin{pmatrix} 2i\cos^2\alpha \sin\frac{\phi}{2} + e^{-i\frac{\phi}{2}} & 2i\sin\alpha\cos\alpha \sin\frac{\phi}{2} \\ 2i\sin\alpha\cos\alpha \sin\frac{\phi}{2} & 2i\sin^2\alpha \sin\frac{\phi}{2} + e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}2)$$

ou ϕ représente le déphasage introduit par la lame et α la direction de l'axe lent par rapport à Ox.

De même, la lame L_2 donne naissance à une vibration $\vec{V}_2\ (x_2, y_2)$ telle que

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = M(\phi,-\alpha) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}3)$$

Ces deux vibrations sont reçues sur un analyseur dont la direction fait un angle β avec l'axe Ox. Cet analyseur est représenté par une matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2\beta & \sin\beta\cos\beta \\ \sin\beta\cos\beta & \sin^2\beta \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}4)$$

...

et l'on obtient :

$$\underbrace{V'_1 = \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = A.M(\phi,\alpha) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{Pour } V_1} \qquad \underbrace{V'_2 = \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} = A.M(\phi,-\alpha) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{Pour } V_2} \quad (5\text{-}5)$$

Etudions quelques cas particuliers intéressants en supposant tout d'abord la vibration incidente $\overrightarrow{OP}$ parallèle à Oy (figure 5-3).

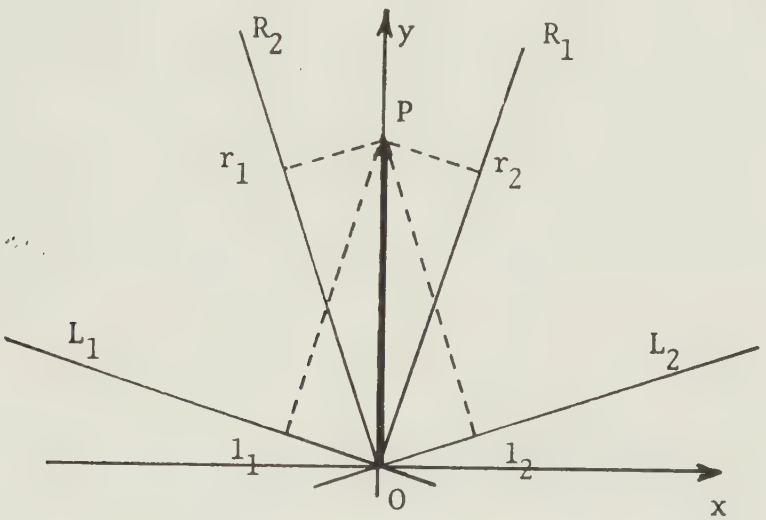


Figure 5-3

- Si l'analyseur est parallèle à Ox, $\beta = 0$, et les vibrations émergentes sont respectivement :

$$V'_1 = \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M(\phi,\alpha) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad V'_2 = \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M(\phi,-\alpha) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5\text{-}6)$$

Elles ont la même amplitude, mais sont en opposition de phase, on obtient dans le plan image la transformée de Hilbert de l'objet, quel que soit le déphasage ϕ, c'est-à-dire quelle que soit la longueur d'onde.

- Si l'analyseur est parallèle à Oy, on obtient :

$$V'_1 = \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M(\phi,\alpha) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad V'_2 = \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M(\phi,-\alpha) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5\text{-}7)$$

Les deux vibrations sont en phase et l'on observe l'objet quel que soit ϕ.

...

- Si l'analyseur est perpendiculaire à la direction symétrique de $\overrightarrow{OP}$ par rapport à une ligne neutre de l'une des lames et si ces dernières sont demi-onde, on montre de même que la vibration incidente est transformée en deux vibrations rectilignes dont l'une est éteinte, on obtient le foucaultgramme de l'objet.

3 - DIAGRAMME DE FRESNEL

Les résultats précédents peuvent être obtenus simplement en observant le diagramme de Fresnel (figure 5-4).La vibration incidente $\overrightarrow{OP}$ donne à la sortie des deux lames deux vibrations elliptiques symétriques décrites de façon synchrone en sens inverse et l'on observe la projection de ces ellipses sur la direction de l'analyseur. La figure (5-4) représente le cas où l'on observe deux composantes en opposition de phase, c'est-à-dire la transformée de Hilbert.

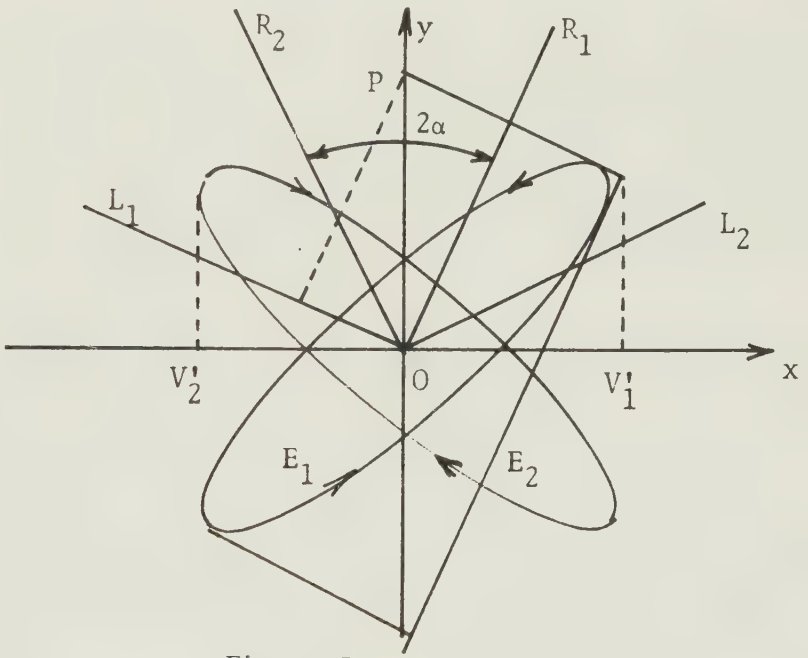


Figure 5-4

Lorsque les lames sont demi-onde, les ellipses se réduisent à deux vibrations rectilignes symétriques de la vibration incidente par rapport aux lignes neutres.

Il est alors intéressant de reprendre exactement le dispositif décrit par A. KASTLER {20} etd'accoler des lames dont les axes font un angle de 45°.

...

On peut alors, par simple rotation de l'analyseur, observer successivement, en lumière monochromatique, l'objet, la figure de Hilbert ou le foucaultgramme, l'énergie participant à chacun des phénomènes étant la même.

Il est à remarquer que si l'on accepte de tourner et l'analyseur et le polariseur, il est possible d'observer un foucaultgramme avec une longueur d'onde quelconque en utilisant une lame dont les lignes neutres font un angle quelconque et présentent un déphasage arbitraire. Il suffit que l'une des lignes neutres soit parallèle à la vibration incidente et que l'analyseur soit croisé, l'une des vibrations est éteinte, l'autre est elliptique, et l'on en observe la projection sur la direction de l'analyseur.

4 - TRANSFORMEE DE HILBERT EN LUMIERE BLANCHE

Nous avons vu ci-dessus que, lorsqu'on observe l'objet ou la transformée de Hilbert, le déphasage n'intervient pas, il est donc possible avec une telle lame d'effectuer des observations en lumière blanche. Suivant que le polariseur et l'analyseur sont parallèles ou croisés, on observe les projections des ellipses E_1 et E_2 (figure 5-4) sur Oy et Ox.

Lorsqu'on change la longueur d'ondre, c'est-à-dire lorsque le déphasage

$$\phi = \frac{2\pi(n_e - n_o)}{\lambda} e$$

varie, les ellipses se déforment mais restent toujours symétriques par rapport à Oy, et sont toujours décrites de façon synchrone.

Il faut remarquer que les ellipses se déformant, l'amplitude transmise varie avec la longueur d'onde. Dans le cas de la transformée de Hilbert, par exemple, les radiations telles que $\phi = 2k\pi$ sont éteintes comme on peut le voir à partir de l'expression 5-6 ou sur la figure 5-4. Lors de l'observation en lumière blanche, certaines radiations seront donc absentes ou atténuées. Cependant, si les lames sont suffisammentfines, cette atténuation n'est pas très importante et peut être négligée.

...

Par exemple, dans le cas d'une lame demi-onde pour $\lambda = 0,52\mu$ on obtient une transformée de Hilbert pour laquelle la baisse d'intensité n'atteint que 20% pour le bleu extrême ($\lambda = 0,40\mu$) et le rouge extrême ($\lambda = 0,75\mu$).

L'utilisation d'une source blanche (ou polychromatique) permet d'observer la transformée de Hilbert à l'aide de sources conventionnelles avec le maximum de luminosité, d'une part, mais permet, d'autre part, grâce à la saturation plus ou moins grande des couleurs, d'augmenter la sensibilité lors de l'observation des défauts de phase.

La figure 5-5 montre la transformée de Hilbert en lumière blanche d'un volume d'air chauffé par un fer à souder électrique placé devant un miroir de 10cm de diamètre et de 3m de rayon de courbure. La lame utilisée était 3 $\lambda/2$ pour $\lambda = 6328$ Å .

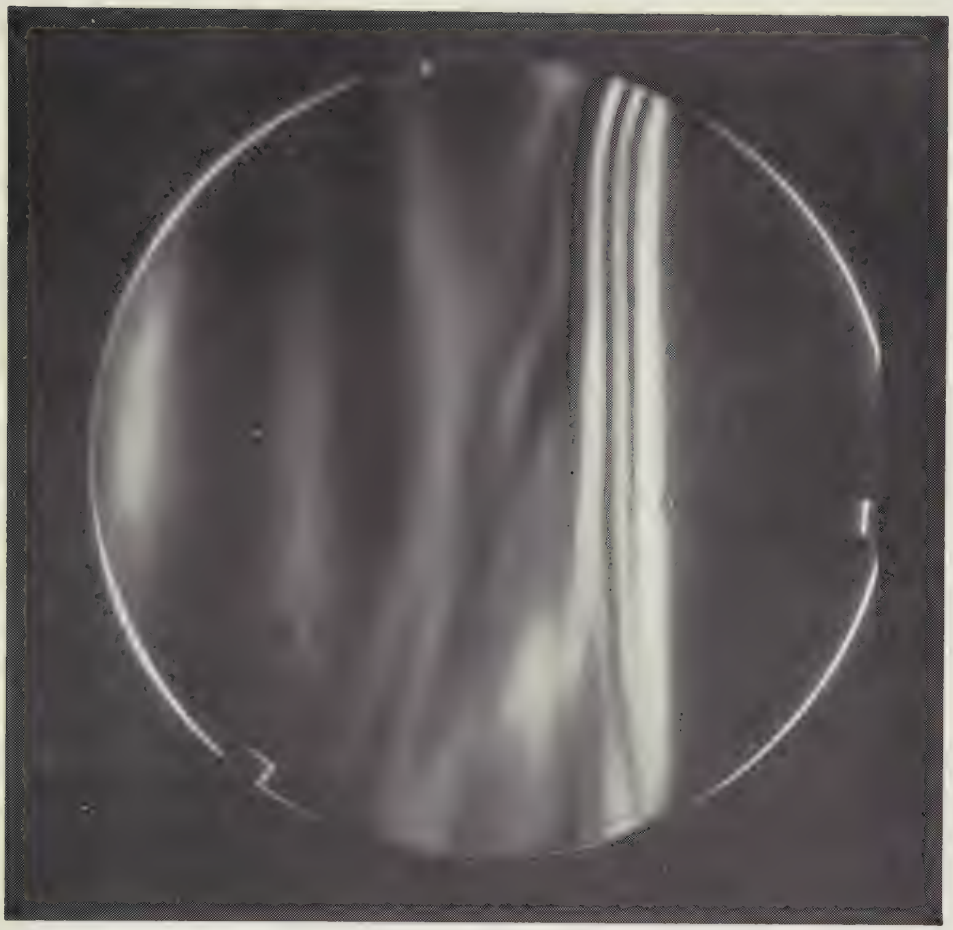


Figure 5-5

CHAPITRE 6

VISUALISATION A L'AIDE D'UN FILTRE A DEPHASAGE QUELCONQUE

FILTRES POLARISANTS

On a étudié au chapitre 2 l'influence d'une variation du déphasage du filtre lors de la réalisation optique de la transformée de Hilbert et l'on a vu que ce déphasage devait être le plus proche possible de π. On va voir qu'il est cependant possible de visualiser des défauts de phase à l'aide d'un filtre introduisant un déphasage quelconque, et même nul, sur une partie du plan spectral (l'image obtenue n'est évidemment plus la transformée de Hilbert de l'objet) Cette méthode est à rapprocher des méthodes de contraste de phase à déphasage variable {14}{25}mais est d'une mise en oeuvre très simple et se prête particulièrement bien au contrôle de l'état de surface ou d'homogénéité de matériaux optiques {13}.

La comparaison de la méthode avec la méthode de contraste de phase à couteau {2}{7}{12}{26} montre que si l'on utilise un écran non absorbant, mais déphasant de π, le contraste obtenu dans l'image est $\sqrt{2}$ fois supérieur à celui que donne la méthode du contraste de phase. Par contre, lorsque l'écran est absorbant, le contraste de l'image est pratiquement le même quelque soit le déphasage.

1 - PRINCIPE DE LA VISUALISATION

Pour réaliser cette visualisation, on introduit dans le plan spectral (ou plan de Fourier) P (figure 6-1) et sur une partie du champ un écran absorbant. Cet écran introduit, outre l'absorption un déphasage inconnu quelconque θ.

...

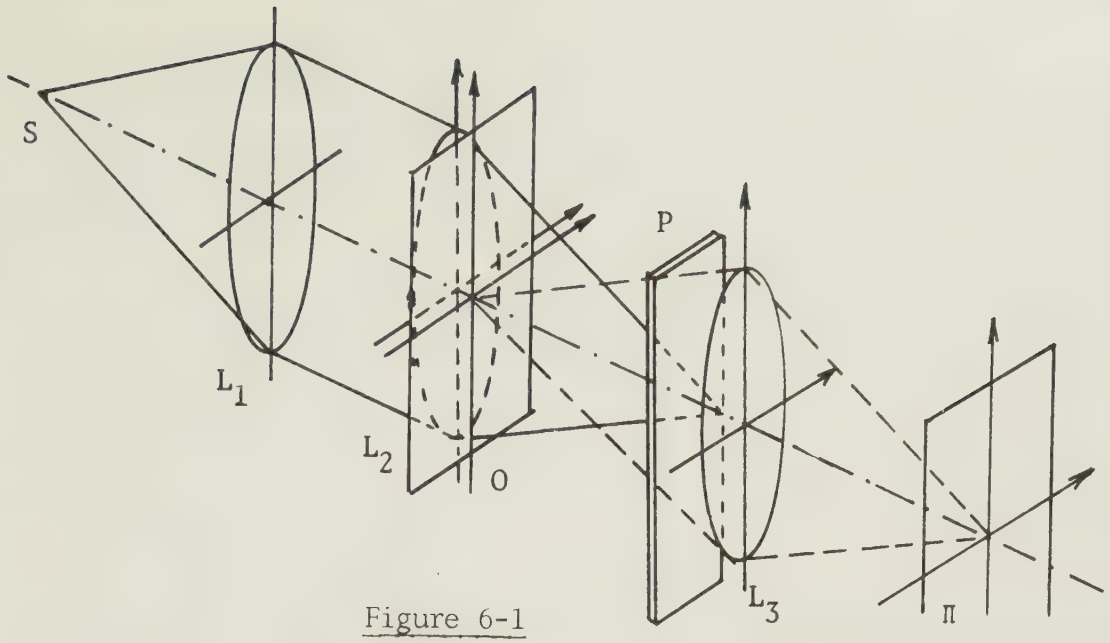


Figure 6-1

L'observation s'effectue en translatant l'écran dans son plan de façon à sélectionner les fréquences spatiales de l'objet de phase que l'on veut transformer en image d'amplitude.

Considérons une composante sinusoïdale de l'objet de phase de période p. Soit :

$$f_1(x) = e^{i\phi_o \cos 2\pi x/p} \qquad (6\text{-}1)$$

cette composante.

En supposant le déphasage faible ($\phi_o << 1$) :

$$f_1(x) \simeq 1 + \frac{1}{2} i\phi_o \left(e^{\frac{i2\pi x}{p}} + e^{-\frac{i2\pi x}{p}} \right) \qquad (6\text{-}2)$$

Dans le plan P de la lentille L_3 le spectre de l'objet est constitué de trois signaux, un spectre d'ordre zéro d'amplitude 1, et deux spectres latéraux d'amplitude $\frac{i\phi_o}{2}$.

Supposons que l'enfoncement du couteau soit tel qu'il déphase et absorbe un pic latéral et le spectre d'ordre zéro.

Soit $\tau = N^{-\frac{1}{2}}$ la transmittance en amplitude et θ le déphasage introduit par le couteau de phase. On obtiendra, dans le plan image Π , une amplitude

$$f_2(x) = \tau e^{i\theta} + i\tau e^{i\theta} \phi_o/2\, e^{\frac{i2\pi x}{p}} + i\, \phi_o/2\, e^{\frac{i2\pi x}{p}} \quad \ldots$$

Soit encore :

$$\tau e^{i\theta}\left[1 + \frac{i\phi_o}{2} e^{\frac{i2\pi x}{p}} + \frac{i\phi_o}{2\tau} e^{-i(\frac{2\pi x}{p} + \theta)}\right] \qquad (6\text{-}3)$$

A partir de l'expression 6-3 l'éclairement dans le plan image s'écrit, à un facteur constant près :

$$I(x) = 1 + \frac{\phi_o^2}{4}(1 + N) + N^{1/2}\frac{\phi_o^2}{2}\cos(\frac{4\pi x}{p} + \theta) + N^{1/2}\phi_o \sin(\frac{2\pi x}{p} + \theta) - \phi_o \sin\frac{2\pi x}{p} \qquad (6\text{-}4)$$

Nous distinguerons deux cas et, dans chacun des cas, nous examinerons la modulation

$$M = \frac{Imax - Imin}{Imax + Imin}$$

de l'image obtenue et sa variation avec le déphasage.

Dans le cas où l'absorption est faible ou nulle (N=1) (6-4) s'écrit en négligeant les termes infiniment petits d'ordre supérieur (termes proportionnels à ϕ_o^2):

$$I = 1 + 2\phi_o \sin\frac{\theta}{2}.\cos(\frac{2\pi x}{p} + \frac{\theta}{2}) \qquad (6\text{-}5)$$

On constate une translation de la sinusoïde (y compris dans le cas du contraste de phase $\theta = \frac{\pi}{2}$) et la modulation est :

$$M = 2\phi_o \sin\frac{\theta}{2} \qquad (6\text{-}6)$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$; la modulation est $M = \sqrt{2}\,\phi_o$ on perd donc un facteur $\sqrt{2}$ par rapport au contraste à bande déphasante. Ce facteur $\sqrt{2}$ peut être rétabli en faisant $\theta = \pi$,on a alors $M = 2\phi_o$.

Dans le cas où l'absorption est importante, les phénomènes sont très différents, on va voir en effet que le déphasage ϕ influe peu sur le résultat.

...

Supposons que la transmittance en amplitude $N^{-1/2}$ de la lame soit du même ordre de grandeur que le déphasage ϕ_o introduit par l'objet. L'expression (6-4) devient alors, en négligeant les termes du deuxième ordre :

$$I = 1 + \frac{\phi_o^2}{4} N + N^{1/2} \phi_o \sin\left(\frac{2\pi x}{p} + \theta\right) \qquad (6\text{-}7)$$

et la modulation devient :

$$M = \frac{N^{1/2} \phi_o}{1 + \frac{N\phi_o^2}{4}} \qquad (6\text{-}8)$$

On constate bien que l'objet de phase a été transformé en un objet d'amplitude la modulation est la même quelque soit le déphasage, en particulier la même que celle obtenue en contraste de phase.

En outre, on observe un "glissement" de la sinusoïde.

2 - DIAGRAMME DE FRESNEL

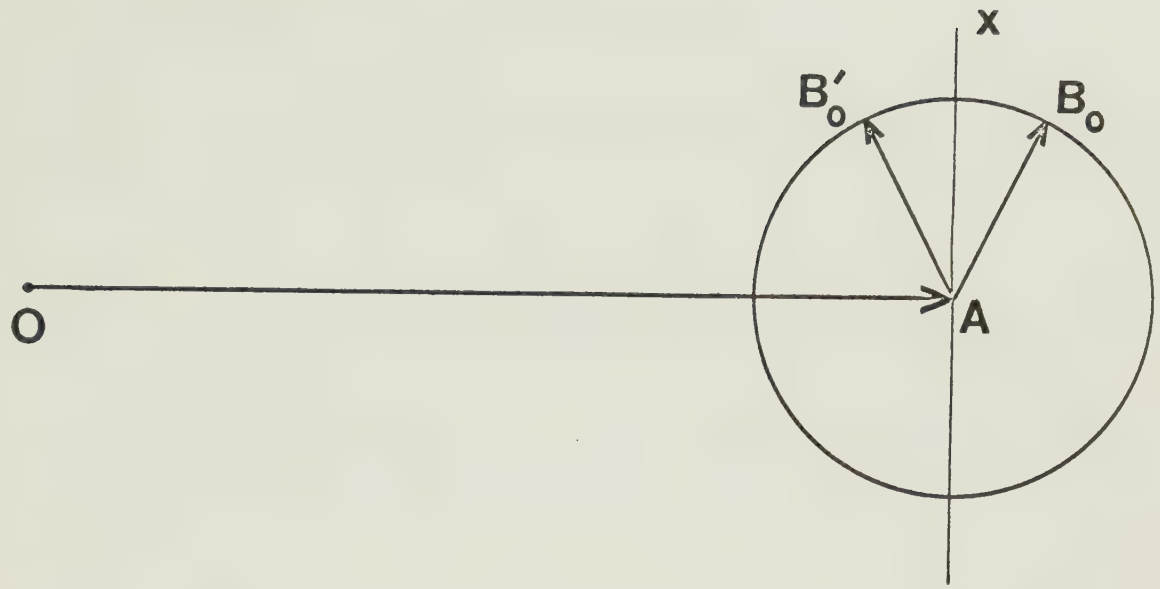
Les phénomènes que l'on vient de décrire peuvent être précisés à l'aide du diagramme de Fresnel. L'objet $1 + i\phi_o \cos \frac{2\pi x}{p}$ peut être représenté par la somme d'un vecteur OA d'amplitude 1 et de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}_o$ et $\overrightarrow{AB'}_o$ d'amplitude $\frac{\phi_o}{2}$ qui tournent en sens inverse lorsqu'on se déplace dans le champ (figure 6-2a).

L'action de la lame déphasante et absorbante est d'amener l'origine O en O' et un des vecteurs tournants $\overrightarrow{AB'}_o$ en $\overrightarrow{AB''}$ (fig. 6-2b)

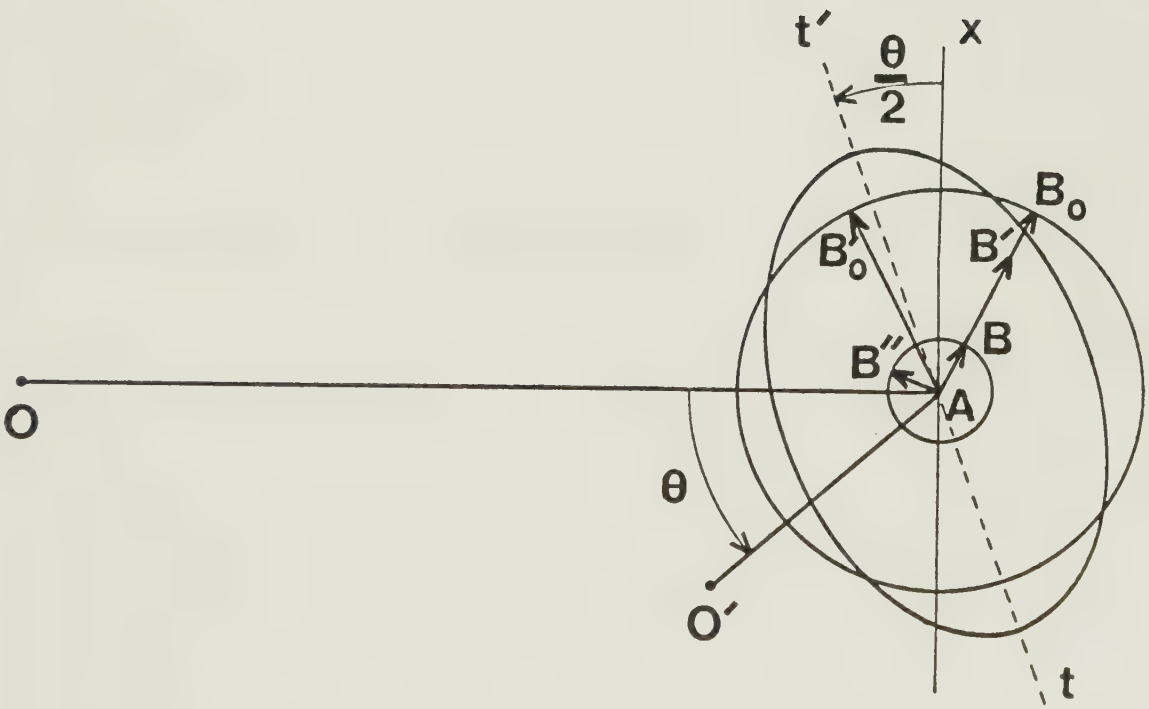
D'autre part, $\overrightarrow{AB}_o$ peut être considéré comme la somme de deux vecteurs :

- $\overrightarrow{AB}$ de même module que $\overrightarrow{AB''}$
- $\overrightarrow{AB'}$ tel que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB}_o$

...



(a)



(b)

Figure 6-2

La combinaison des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB'}$ et $\overrightarrow{AB''}$ montre que l'extrémité du vecteur-somme décrit une ellipse de grand axe tt' déduit de Ax par une rotation $\frac{\theta}{2}$ de centre A.

Les axes de l'ellipse valent respectivement, pour le grand axe et pour le petit :

$$\frac{\phi_o}{2}\left[1 + N^{-1/2}\right] \quad ; \quad \frac{\phi_o}{2}\left[1 - N^{-1/2}\right]$$

$N^{-\frac{1}{2}}$ étant la transmittance en amplitude de la lame absorbante.

On retrouve le résultat établi précédemment. Quelque soit le déphasage , en particulier s'il vaut $\frac{\pi}{2}$, la modulation est plus faible que lorsqu'on déphase de 180°.

Si l'absorption est nulle, l'ellipse se réduit à un segment de droite, colinéaire à $\overrightarrow{OA}$ si $\theta = \pi$, inclinée à 45° sur $\overrightarrow{OA}$ si $\theta = \pi/2$ On voit alors nettement que la modulation est $\sqrt{2}$ fois plus faible que dans le cas du contraste de phase.

Lorsque l'absorption devient importante, l'ellipticité devient pratiquement nulle et la modulation est la même quelque soit le déphasage. Ainsi, dans le cas de l'absorption forte, il n'est pas nécessaire d'utiliser un déphasage déterminé.

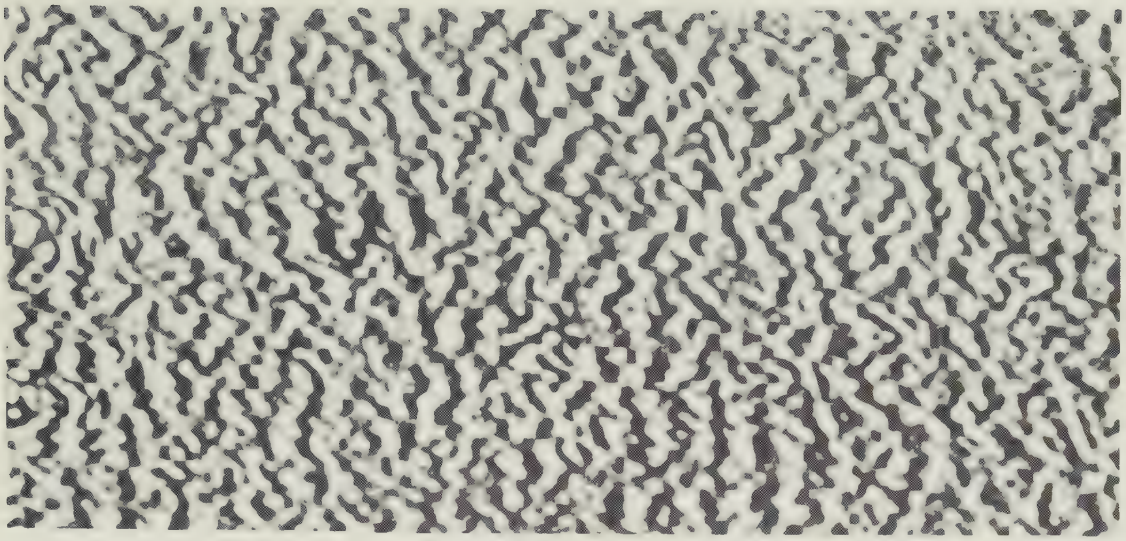
3 - OBSERVATION DE PETITS DEFAUTS DE SURFACE

La figure 6-3 montre le micromamelonnage d'une lame transparente observée :

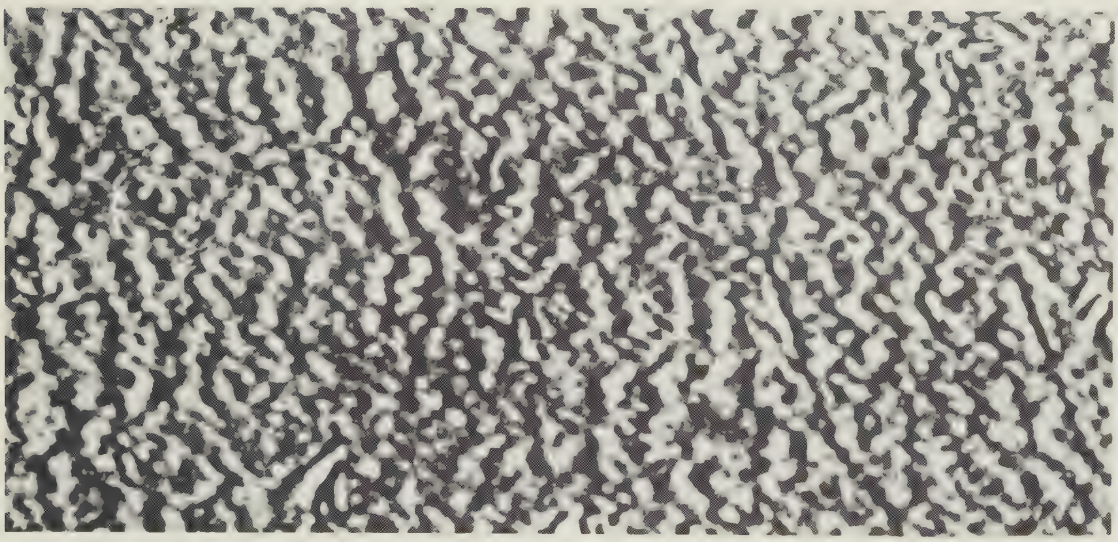
a) par la méthode classique du contraste de phase,
b) avec un déphasage quelconque. On a utilisé un film photographique uniformément impressionné, immergé entre deux lames de verre,
c) à l'aide de la lame biréfringente décrite dans ce même chapitre et utilisée pour réaliser la Transformation de Hilbert en lumière blanche.

La densité optique était de l'ordre de 3 pour les différents cas.

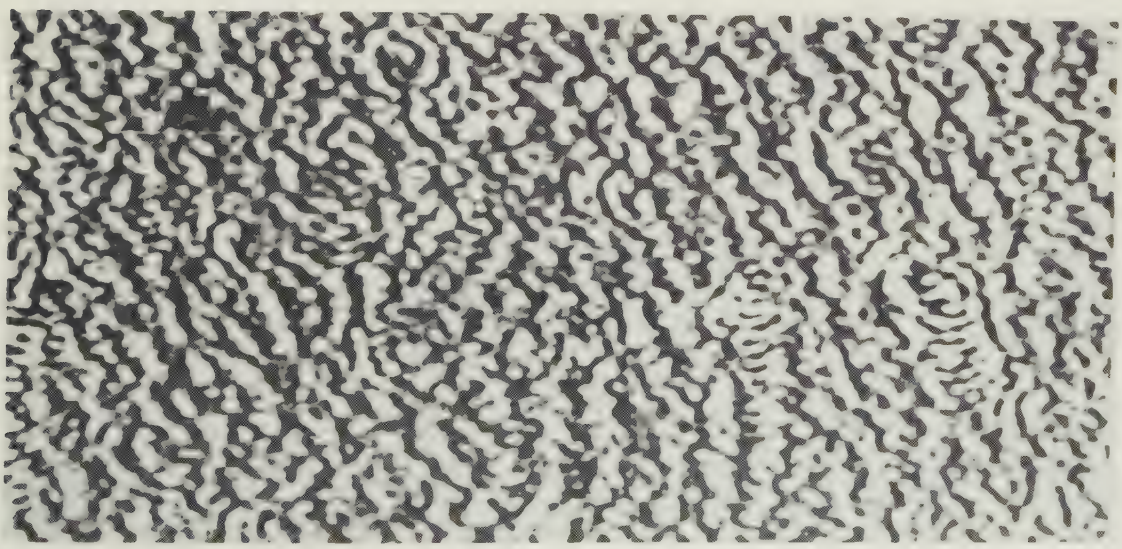
...



a



b



c

Figure 6-3

Parmi les différents types de filtres absorbants, on peut utiliser un filtre réalisé à l'aide d'une feuille de Polaroïd disposée entre deux lames de verre afin d'éviter les variations rapides de phase dans le plan spectral.

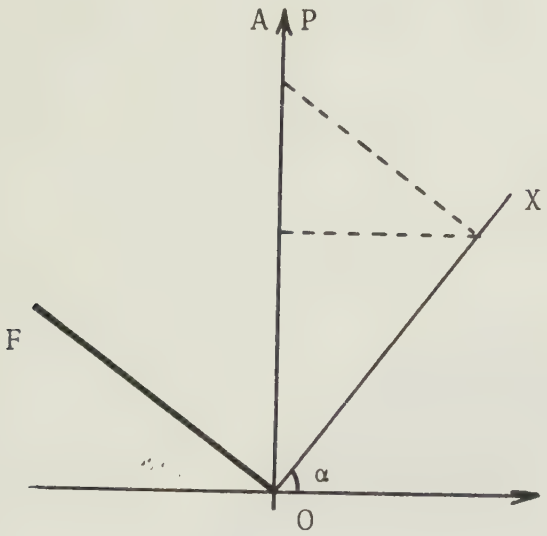


Figure 6-4

Il est à noter que dans le cas de l'utilisation d'un tel filtre, l'absorption est très facilement réglable et, pour un filtre situé entre polariseur et analyseur parallèles, l'absorption varie comme la quatrième puissance de l'angle α que font les directions que laissent passer le polariseur P et l'analyseur A avec la direction OX qu'arrête le filtre F (figure 6-4).

Une densité d=3 correspond à un angle $\alpha \approx 10°$ parfaitement repérable.

La figure 6-5 montre la photographie du micromamelonnage de quelques angströms d'une lame de verre, polie à l'aide d'un polissoir en teflon, observée à l'aide d'un tel montage à trois polariseurs, la densité équivalente était de l'ordre de d = 3. La photographie montre une quantité de lumière parasite non négligeable due à la mauvaise qualité des lames d'immersion qui enserraient la feuille de polaroïd et qui présentaient de la biréfringence.

4 - FILTRE DE HILBERT REALISE A L'AIDE DE POLAROÏD

Le filtre que nous venons de décrire (feuille de polaroïd immergée entre deux lames de verre) peut aussi être utilisé pour observer la Transformée de Hilbert d'un objet.

Nous avons déjà signalé qu'une difficulté importante de la méthode par transformée de Hilbert était la réalisation d'un filtre

...

Figure 6-5

tel que la ligne de réparation entre les deux plages déphasantes soit parfaitement nette et rectiligne. Ceci est difficile à réaliser lors de l'utilisation de lames biréfringentes telles que celle décrite au chapitre précédent. Par contre les films de Polaroïd permettent d'obtenir des bords de plage très nets et, à condition d'adopter l'indice d'immersion, fournissent des filtres de Hilbert à séparation nette.

Un tel filtre, placé entre un polariseur P et un analyseur A, comme sur la figure 6-6, permet d'observer, exactement comme la "lame de Kastler", et suivant les orientations respectives du filtre F et de l'analyseur A, l'image de l'objet, sa transformée de Hilbert ou son foucaultgramme.

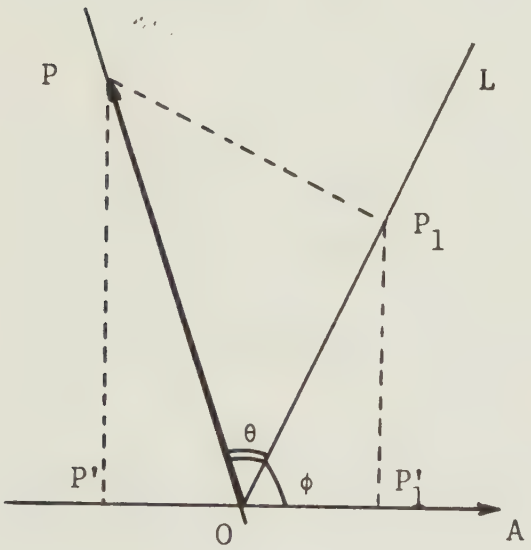


Figure 6-6

Soit $O\vec{P}$ la vibration rectiligne incidente sur la moitié du filtre contenant le polaroïd. Si on néglige son absorption, le polaroïd L transmet la projection $O\vec{P}_1$ de $O\vec{P}$ sur L, alors que sur la partie libre du plan spectral, $O\vec{P}$ est totalement transmise.

Si $O\vec{A}$ est la direction de l'analyseur, celui-ci transmet les projections $O\vec{P}'$ et $O\vec{P}'_1$ qui peuvent être en opposition de phase, comme sur la figure 6-6. Si OA est orienté de telle sorte que $O\vec{P}'$ et $O\vec{P}'_1$ aient même module et soient en opposition de phase, on obtient la transformée de Hilbert de l'objet.

En pratique, il faut tenir compte de l'absorption du filtre; si τ est sa transmittance en amplitude, θ et ϕ les directions du polariseur et de l'analyseur par rapport à la direction de transmission du filtre $O\vec{L}$.

...

La condition d'obtention de la Transformée de Hilbert est:

$$\tau \cos\theta.\cos\phi = - \cos(\theta + \phi) \qquad (6\text{-}9)$$

De plus, afin d'avoir le phénomène le plus lumineux possible, il faut que $|\cos(\theta+\phi)|$ soit maximum. Ces deux conditions conduisent à

$$\cos\phi = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{\tau+2}} \qquad (6\text{-}10)$$

Pour que cette condition soit remplie, il faut que θ et ϕ varient entre $45°(\tau=0)$ et $55°$ $(\tau=1)$.

Dans le cas du polariseur HN32 que nous avons utilisé $(\tau=0{,}8)$, l'expression 6-10 conduit à choisir $\theta=\phi= 53°30'$.

Du point de vue de la réalisation pratique, le filtre est obtenu à partir d'une feuille de polaroïd dont on dissout le substrat dans de l'acétate d'éthyle, il reste alors un film très résistant de 15µ d'épaisseur qui constitue la substance active du polariseur. Ce film se coupe ou se déchire de façon très nette suivant la direction que laisse passer ce polariseur.

De façon à éviter le déphasage supplémentaire introduit par l'épaisseur optique de la feuille de polaroïd, celle-ci doit être immergée entre deux lames de verre ne présentant pas de biréfringence dans un liquide possédant le même indice de réfraction.

Afin d'adapter au mieux l'indice du liquide, nous avons fait une comparaison systématique du polaroïd et des liquides en utilisant un interféromètre à franges de superposition autocompensé {24} dont le schéma est représenté figure 6-7.

...

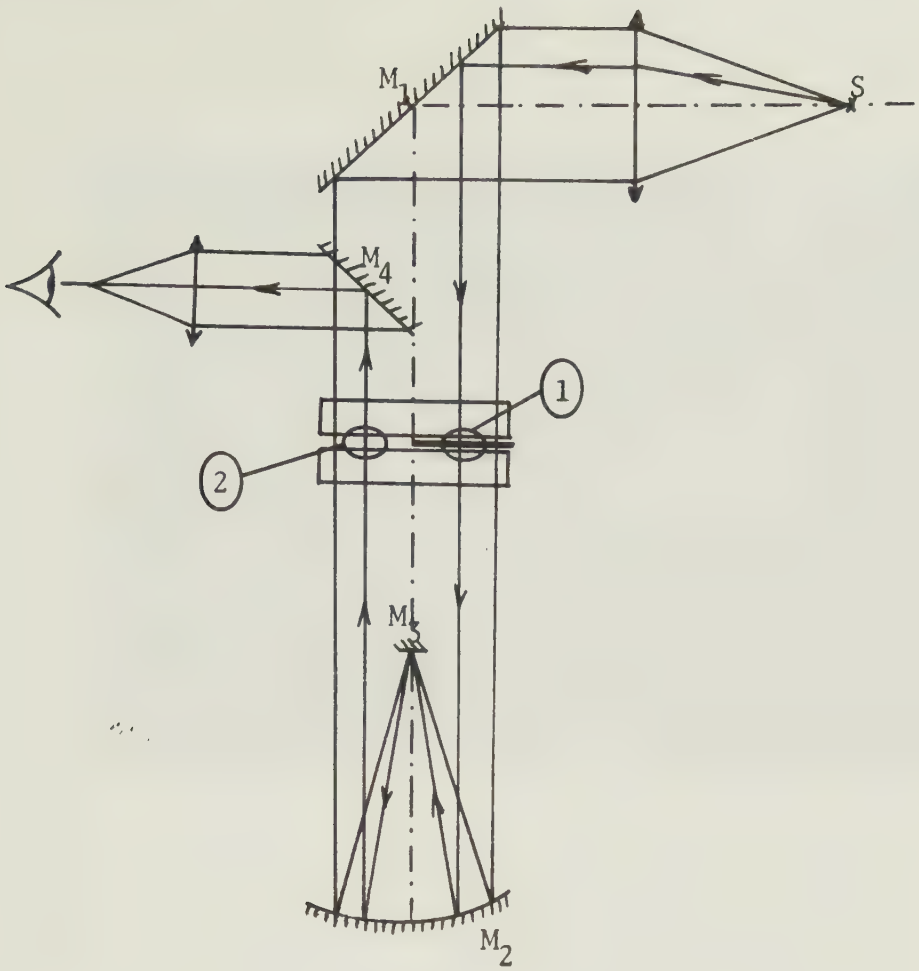


Figure 6-7

Le film de polaroïd est immergé entre les deux faces d'un étalon de Fabry-Pérot dont les faces argentées sont tournées vers l'extérieur. Un rayon ayant subi une réflexion multiple dans la zone (1) se trouve, après traversée du système afocal M_2M_3, compensé dans la zone (2).

La figure 6-8 montre l'aspect du champ observé dans le cas d'une immersion réalisée avec de l'essence de cèdre qui s'avère être le liquide le mieux adapté dans le cas de feuilles de polaroïd. On ne perçoit pas sur la photographie de décalage dans le système de franges, ce qui prouve, à la précision des mesures près, que l'indice du polaroïd et l'indice de l'essence de cèdre sont égaux.

La figure 6-9 montre la transformée de Hilbert d'un courant de convexion observé à l'aide d'un filtre réalisé selon la méthode décrite ci-dessus.

...

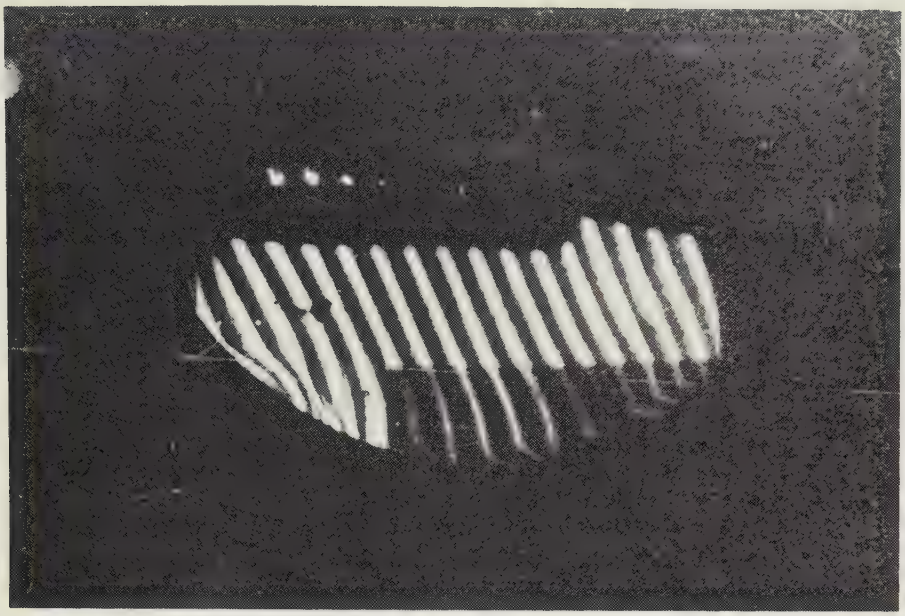


Figure 6-8

Figure 6-9

5 - CONCLUSION

Dans le présent chapitre, nous avons montré qu'un simple filtre absorbant permet d'observer de petits défauts de phase du type de ceux rencontrés dans l'étude des états de surface. De plus, si ce filtre est réalisé à l'aide d'une feuille mince de polaroïd, il est possible moyennant certaines conditions d'observer la Transformée de Hilbert. Cependant, ce filtre ne constitue pas la solution idéale et il s'avère que aucune des techniques que nous avons envisagées ne donne un filtre parfait, soit que l'on ne soit pas parfaitement maître du déphasage introduit (dépôt sous vide, polaroïd immergé), soit que l'on ne sache pas réaliser une limite parfaitement nette entre les deux plages du filtre (lame de Kastler). A cette imperfection du bord du filtre et aux autres défauts des systèmes optiques (poussières, rayures, etc...) sont liés les problèmes de lumière parasite que l'on retrouve dans tous les dispositifs du type contraste de phase ou méthode de Foucault. Nous avons vu au chapitre 4 comment il était possible de réduire le bruit cohérent, c'est-à-dire en fait comment il était possible de le rendre incohérent. Dans l'espoir de diminuer aussi le bruit incohérent, nous avons étudié un dispositif permettant de réaliser la soustraction holographique de deux éclairements. Cette méthode de soustraction fait l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 7

SOUSTRACTION DE LUMINANCES

1 - INTRODUCTION

La recherche entreprise sur la soustraction de luminances trouve son origine dans le désir de supprimer le "voile" non uniforme (transformée de Hilbert d'une pupille libre, fig. 2-5) qui subsiste toujours dans le plan d'observation d'un montage à transformée de Hilbert.

Les montages holographiques permettent de réaliser de façon simple la soustraction de deux ou plusieurs amplitudes lumineuses {27}{28}{29}{30} Le cas de la soustraction de luminances est peut-être cependant plus important et déborde très nettement le cadre de l'amélioration des figures de Hilbert. En effet, celle-ci permet de détecter les différences qui existent entre deux scènes et présente de ce fait des applications très nombreuses :

- surveillance automatique,
- analyse de clichés réalisés à partir de satellites météorologiques,
- transmission des seules informations utiles (les modifications de l'image) dans un système de télévision,
- etc...

...

Pour réaliser une telle soustraction, Mme DEBRUS et le Professeur FRANCON modulent spatialement les scènes à soustraire à l'aide d'un diffuseur et procédent par double exposition avec translation de la plaque photographique entre les deux enregistrements {31}. Une autre méthode consiste à moduler les objets à soustraire par deux réseaux complémentaires {32}{33}{34}. PENNINGTON qui, le premier décrivit un dispositif de ce type, utilise une double exposition classique, un réseau placé contre l'émulsion est translaté d'une demi-période entre les deux enregistrements. La plaque obtenue constitue un hologramme-image {35} dont la restitution en lumière cohérente, avec filtrage convenable des ordres diffractés, permet d'obtenir la soustraction recherchée {32}.

Une première difficulté lors de l'utilisation de cette méthode provient de la précision avec laquelle il faut translater le réseau car on ne peut obtenir une soustraction parfaite que lorsque le déphasage introduit vaut exactement 180°. Une seconde difficulté provient de la restitution cohérente qui introduit un bruit important.

Nous décrivons une nouvelle méthode qui permet de vaincre ces difficultés. Cette méthode s'apparente à celle de PENNINGTON {32} en ce sens qu'on procéde par double exposition, les photographies des objets étant modulées par des réseaux complémentaires. Cependant, d'une part nous n'utilisons pas un réseau matériel (ou son image) en contact avec l'émulsion, d'autre part nous ne le translatons pas mécaniquement. A cet effet l'image est modulée par un système de franges obtenues à l'aide d'un prisme biréfringent. La translation du réseau, c'est-à-dire le déphasage de π, est remplacé par le passage d'une configuration polariseur-analyseur parallèles à une configuration polariseur-analyseur perpendiculaires (ou réciproquement). De ce fait on obtient deux systèmes de franges parfaitement complémentaires sans que le réglage demande une précision interférométrique. Comme l'enregistrement peut avoir lieu en éclairage incohérent quasimonochromatique (voir § 3-2) l'hologramme-image enregistré ne présente pas de bruit cohérent.

...

Après avoir rappelé le principe d'enregistrement et de restitution de l'hologramme-image permettant de visualiser les différences qui existent entre deux scènes, nous décrivons deux montages d'enregistrement dont l'un, utilisant un prisme de Wollaston, plus particulièrement adapté aux objets par transmission, peut être utilisé avec une source présentant une certaine largeur. L'autre fait appel à un prisme de Savart et s'adapte parfaitement aux objets incohérents (payages) ne demande que l'emploi d'une lumière quasi-monochromatique (filtre interférentiel).

On montrera au paragraphe 3 que les phénomènes parasites associés à la restitution cohérente peuvent être grandement réduits en utilisant un éclairage partiellement cohérent. On verra comment doit être choisie la pupille du système en fonction du dédoublement produit par le prisme de Savart.

2 - PRINCIPE DE LA METHODE

2.1. Enregistrement de l'hologramme

Le principe de la soustraction de luminances est simple. En effet soient E_1 et E_2 les éclairements dans les deux images que l'on veut soustraire et ν la fréquence du réseau utilisé pour moduler les images. Lors de la première exposition, la plaque enregistre un éclairement

$$E_1(x,y)\ (1 + \cos 2\pi\nu x) \qquad (7\text{-}1)$$

Lors de la deuxième exposition, le réseau est translaté d'une demi-période et la plaque enregistre

$$E_2(x,y)\ (1 - \cos 2\pi\nu x) \qquad (7\text{-}2)$$

L'éclairement total reçu par la plaque est alors

$$E_T = E_1 + E_2 + (E_1 - E_2) \cos 2\pi\nu x \qquad (7\text{-}3)$$

où apparaît explicitement la différence $E_1 - E_2$ modulée par une porteuse de fréquence ν.

...

Cette différence $E_1 - E_2$ pourra être isolée très simplement en utilisant la technique du filtrage passe-bande.

2.2. Restitution

La figure 7-1 montre un montage de restitution de l'hologramme-image obtenu par double exposition. Cet hologramme est restitué à l'aide d'un faisceau de lumière convergente. Un écran E disposé dans le plan spectral ne laisse subsister que le spectre d'ordre +1 (ou -1).

Une lentille L_2 forme en H' une image qui est la différence des deux objets utilisés pour effectuer l'enregistrement. L'ensemble L_2H' peut évidement être constitué par l'oeil et la rétine de l'observateur.

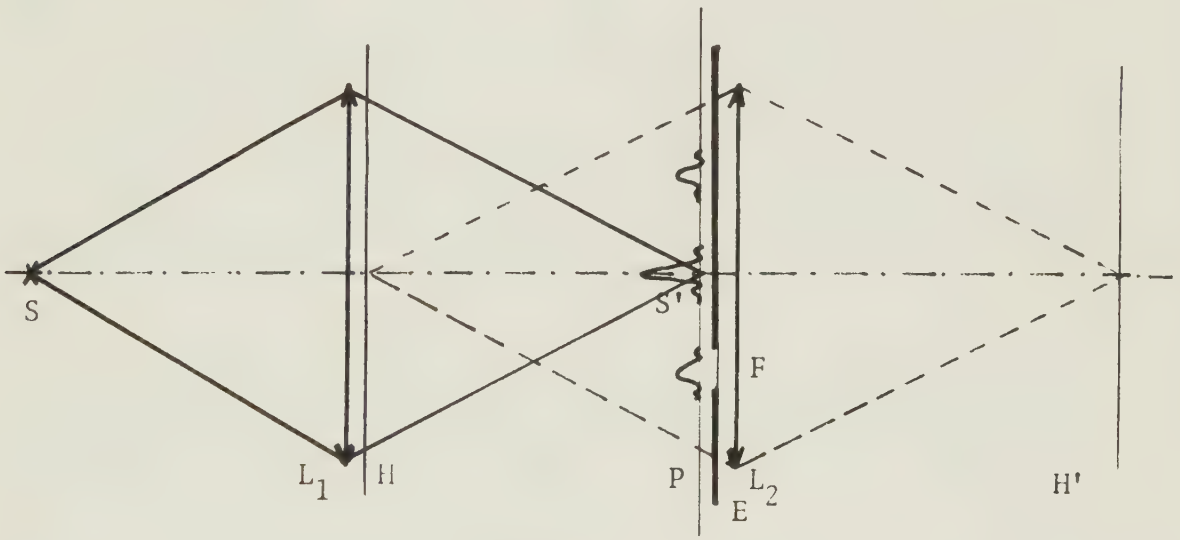


Figure 7-1

3 - MONTAGES D'ENREGISTREMENT

3.1. Montage utilisant un prisme de Wollaston

Le premier dispositif que nous avons utilisé (fig. 7-2) se compose principalement d'un prisme biréfringent de Wollaston sur lequel on forme l'image intermédiaire de l'objet O à l'aide d'une lentille L_1. Une deuxième lentille L_2 forme l'image finale I dans le plan de la plaque H.

...

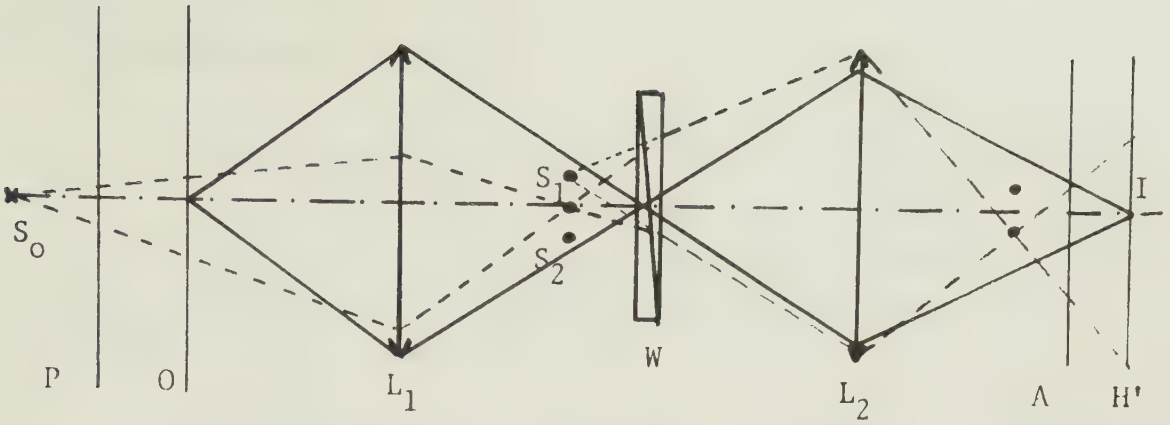


Figure 7-2

De la source ponctuelle monochromatique S_o, le prisme W, placé entre un polariseur P et un analyseur A orientés à 45° des lignes neutres du prisme de Wollaston, donne deux images S_1 et S_2 déduites de l'image S par des rotations d'angles $+\alpha$ et $-\alpha$ par rapport au prisme de Wollaston, de même intensité, et polarisées à angle droit. L'analyseur A permet de faire interférer les deux faisceaux d'éclairage dans le plan de la plaque H. W et H étant conjugés dans la lentille L_2, il n'y a pas de dédoublement de l'image qui, dans le plan H, est simplement modulée par un réseau de franges rectilignes sinusoïdales de contraste 1.

Si l'objet présente une transmittance en intensités T_1 (cet objet peut être pas exemple une diapositive placée dans le plan O) l'amplitude objet est de la forme.

$$\sqrt{T_1\ (x,y)}\ e^{\,i\phi_1(x,y)} \qquad (7\text{-}4)$$

où $\phi_1\ (x,y)$ représente la phase de l'onde ayant traversée l'objet.

Si l'on suppose que les images S_1 et S_2 sont symétriques par rapport à l'axe du système , on obtient dans le plan H, entre polariseur et analyseur parallèles, une amplitude:

$$A_1\ (x,y) = \sqrt{T_1}\ e^{\,i\,\phi_1} \cos 2\pi u x$$

...

et l'éclairement vaut

$$E_1 = |A_1(x,y)|^2 = T_1 \cos^2 2\pi\upsilon x = \frac{T_1}{2}(1 + \cos 4\pi\upsilon x) \qquad (7\text{-}5)$$

De même, si l'on remplace l'objet de transmittance T_1 par un objet de transmittance T_2, et que l'on opère maintenant entre polariseurs croisés, on obtient :

$$E_2 = |A_2|^2 = T_2 \sin^2 2\pi\upsilon x = \frac{T_2}{2}(1 - \cos 4\pi\upsilon x) \qquad (7\text{-}6)$$

En effectuant deux enregistrements successifs sur une plaque uniformément pré-exposée pour satisfaire aux conditions de linéarité {38} la transmittance en amplitudes complexes est de la forme

$$t = a + b\,(T_1 + T_2) + b\,(T_1 - T_2)\cos 4\pi\upsilon x \qquad (7\text{-}7)$$

On a obtenu l'hologramme-image de la différence $T_1 - T_2$ des transmittances, enregistré avec une porteuse de fréquence spatiale 2υ.

Du point de vue expérimental, il est à noter qu'avec ce dispositif biréfringent, ainsi qu'avec celui décrit au § 3-3, on est assuré que le déphasage introduit entre les deux poses est exactement de π, les franges sombres et claires s'échangent sur place, à condition de tourner le polariseur P et non l'analyseur A de 90°. En effet, les polariseurs ne sont pas des lames plan-parallèles parfaites et introduisent un déphasage variable dans le champ; ce déphasage change lorsqu'on tourne le polariseur ou l'analyseur; cependant, ce déphasage peut être inclus dans le terme de phase $\phi(x,y)$ de l'objet s'il se produit <u>avant</u> le dédoublement, car il affecte alors de la même façon les deux composantes polarisées à angle droit qui traversent le Wollaston et ne modifie donc pas la position du système de franges.

...

Utilisation en source large

L'hologramme (expression 7-7) qui est réalisé en éclairage cohérent, enregistre tout le bruit dû à la cohérence: speckling du laser utilisé, figures de diffraction parasites dues aux poussières et imperfections des pièces optiques,et ceci est d'autant plus gênant que l'on a affaire à un hologramme-image pour lequel il y a une correspondance point à point entre la plaque photographique et l'image restituée.

La première idée qui vient à l'esprit est d'utiliser une source linéaire dont la direction est parallèle à celle des franges enregistrées sur la plaque. Nous avons utilisé une telle source synthétisée à l'aide du dispositif à miroir vibrant décrit au chapitre 4. Les deux images S_1 et S_2 se déplacent alors en synchronisme dans une direction parallèle aux franges et celles-ci ne sont pas modifiées.

Si l'on accepte de moduler les images avec des franges de contraste inférieur à 1, ce qui ne présente aucun inconvénient si ce n'est de diminuer la luminosité des images restituées, ou des images soustraites, on peut montrer qu'il est possible d'utiliser une source présentant une certaine étendue dans la direction perpendiculaire aux franges, c'est à dire en éclairage partiellement cohérent.

3.2. Montage utilisant un prisme de Savart

Pour l'enregistrement de l'hologramme-image, il est souhaitable d'utiliser des dispositifs permettant d'obtenir des "Franges d'Young" à l'aide d'une source étendue {36}{37}. De tels dispositifs sont constitués par des dédoubleurs qui, d'une source S, donnent deux images S_1 et S_2 se déduisant l'une de l'autre par une translation latérale (figure 7-3)

...

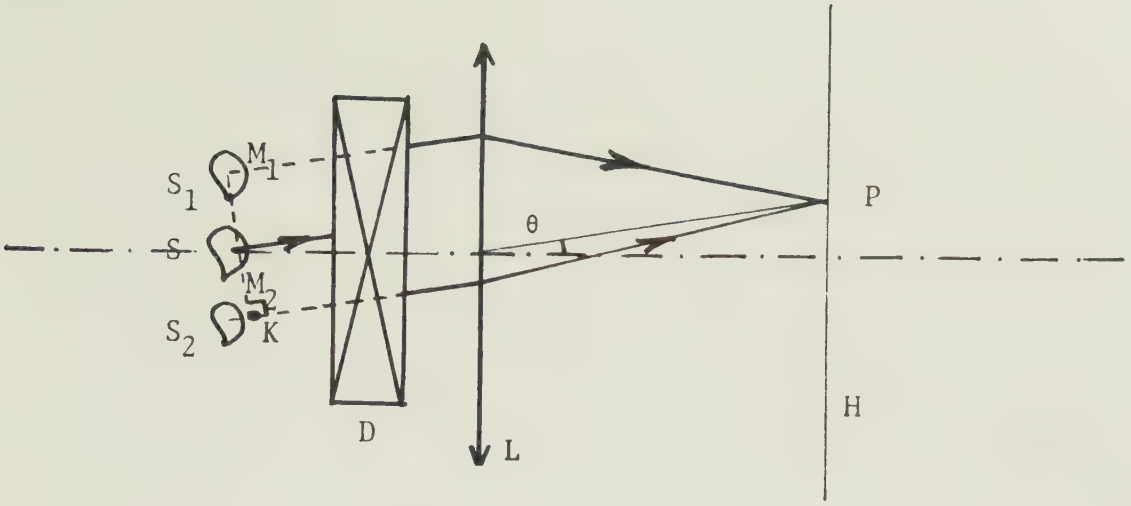


Figure 7-3

En effet soit S une source monochromatique étendue et soient S_1 et S_2 les images qu'en donne le système dédoubleur D. A l'infini, dans la direction θ, c'est-à-dire au point P du plan focal image de l'objectif L l'état d'interférence ne dépend que de la différence de marche M_2K entre les rayons issus des points homologues M_1 et M_2. Quelque soit le couple de points M_1M_2 homologues, cohérents entre eux puisque provenant du même point initial M de la source, l'état d'interférence en P est le même, on obtient donc dans le plan focal de L un système de franges rectilignes sinosoïdales de contraste 1.

Un tel dispositif se montre particulièrement adapté au cas des objets incohérents situés à grande distance (ou rejetés à l'infini par un système optique) et constitue en fait un "appareil photographique à soustraction" si l'on peut remplacer le système de franges par le système complémentaire.

Un prisme de Savart correspont exactement à l'interféromètre que nous venons de décrire et, selon que le prisme travaille entre polariseurs croisés ou parallèles, le système de franges à l'infini (rectilignes en première approximation) qu'il donne est "à centre blanc" ou "à centre noir" il est donc particulièrement adapté à la soustraction de luminances.

...

Le montage utilisé pour réaliser la soustraction à l'aide d'un tel prisme est schématisé sur la figure 7-4. Un objectif L_o, renvoie à l'infini l'image de l'objet AB. Le prisme de Savart S, placé entre un polariseur A_1 et un analyseur A_2 et diaphragmé par une pupille P donne d'un rayon incident deux rayons émergents qui interférent au point B' image de B. La présence du diaphragme d'ouverture P est nécessaire pour que, lors de la restitution, les différents ordres diffractés ne se superposent pas et que l'on puisse séparer l'ordre +1 (ou -1) de la lumière directe comme on va le voir.

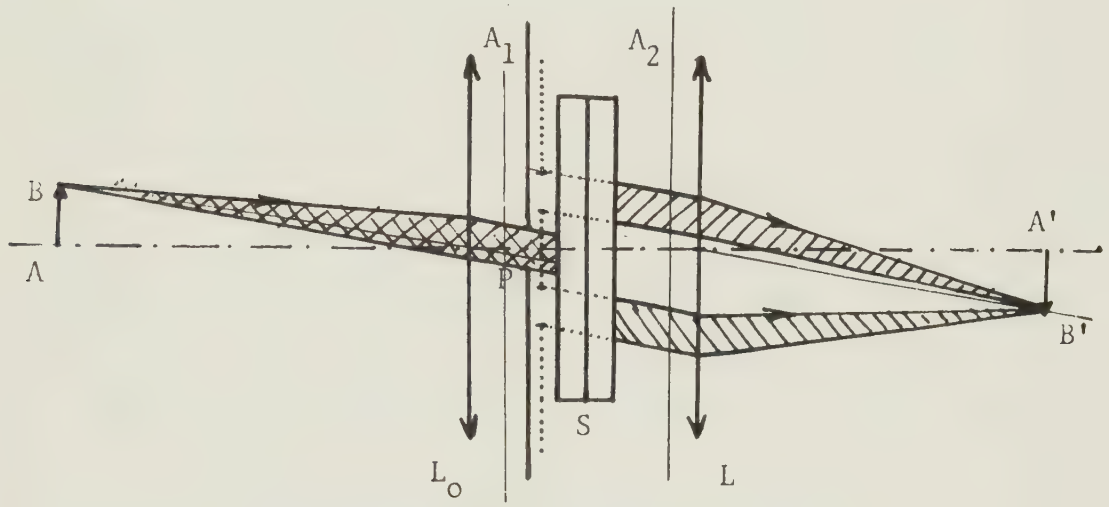


Figure 7-4

3.3. Restitution - Choix de la bande passante

Pour que les ordres diffractés ne se superposent pas lors de la restitution, il est souhaitable de limiter la bande passante du système optique. Pour cela on dispose devant le prisme de Savart une fente dont la direction est perpendiculaire au dédoublement.

Soit L(x) la luminance de l'objet, a la largeur de la fente et b le dédoublement. La fente pouvant être considérée comme infiniment longue, nous effectuerons un calcul à une dimension.

Au point x_o l'amplitude objet peut s'écrire

$$f(x_o) = \sqrt{L(x_o)}\ e^{i\phi(x_o)}\ \delta(x-x_o) \qquad (7\text{-}8)$$

...

Dans le plan des transformées de Fourier, le spectre F(u) est :

1) multiplié par $\text{rect}\,\frac{u}{u_1}$ (pupille limitée par la fente),

2) translaté de $+u_2$ et $-u_2$ (prisme de Savart).

On a alors dans le domaine de Fourier :

$$F(u).\,\text{rect}\,\frac{u}{u_1} \quad * \quad \frac{\delta(u-u_2)+\delta(u+u_2)}{2} \tag{7-9}$$

avec

$$u_1 = \frac{a}{\lambda f}$$

$$u_2 = \frac{b/2}{\lambda f} \tag{7-10}$$

Dans le plan de l'image, un petit élément dx_o de l'objet produit un éclairement :

$$dI = \left| \, |f(x_o) * h(x)|^2 \cos 2\pi u_2 x \right|^2 dx_o$$

$$= \left| \sqrt{L(x_o)}\, e^{i\phi(x_o)} \right|^2 \left| h(x-x_o) \right|^2 \cos^2 2\pi u_2 x \, dx_o$$

Soit un éclairement total dans le plan image :

$$I = \cos^2 2\pi u_2 x \int L(x_o).|h(x-x_o)|^2 \, dx_o$$

$$I = L(x) * |h(x)|^2 . \cos^2 2\pi u_2 x \tag{7-11}$$

Sous réserve que les conditions de linéarité soient respectées lors de l'enregistrement, la transmittance en amplitude de l'hologramme est proportionnelle à l'intensité (7-11). Lors de la restitution (figure 7-1), on effectue une transformation de Fourier cohérente que matérialisent les ordres diffractés dans le plan spectral P.

...

L'amplitude dans le plan P est :

$$\tilde{I}(u) = \frac{1}{2}\left[\delta(u) + \frac{\delta(u + 2u_2) + \delta(u - 2u_2)}{2}\right] * \tilde{L}(u)\ \mathrm{Tr}\ \frac{u}{u_1} \qquad (7\text{-}12)$$

où $\sim$ signifie transformée de Fourier et où $\mathrm{Tr}\ \frac{u}{u_1}$ représente la fonction triangle :

$$y = 1 - \left|\frac{u}{u_1}\right| ,$$

fonction d'autocorrélation de la fonction $\mathrm{rect}\ \frac{u}{u_1}$.

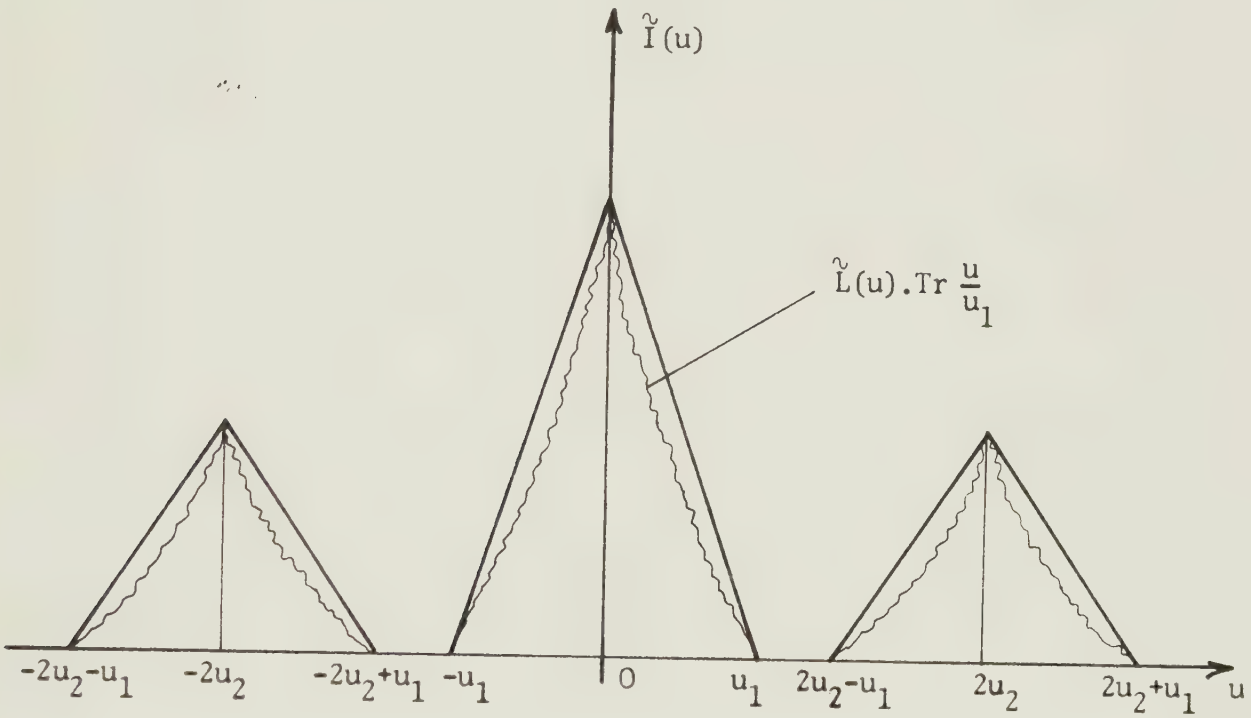


Figure 7-5

La figure 7-5 représente la répartition d'amplitude dans le plan P. La fente F (figure 7-1) permet d'isoler une des bandes latérales, il n'y a pas recouvrement des spectres si $2u_1 < 2u_2$, c'est-à-dire si le dédoublement dû au prisme de Savart est supérieur ou égal à la largeur de la fente (b > 2a).

...

Restitution avec une fente large

Afin de limiter le bruit et d'augmenter la luminosité lors de la restitution on peut utiliser une fente source présentant une certaine largeur

$$\text{soit } u'_1 = \frac{a'_1}{\lambda f} \tag{7-13}$$

La largeur de la fente (en coordonnées réduites) ramenée dans le plan spectral P. L'amplitude lumineuse dans ce plan sera le résultat de la convolution de $\tilde{I}(u)$ (exp. 7-12) par rect $\frac{u}{u'_1}$. Les ordres diffractés s'élargissent et, pour qu'il n'y ait pas recouvrement, il suffira que

$$2\left(u_1 + \frac{u'_1}{2}\right) \leqslant 2u_2$$

On pourra prendre une fente de largeur a' telle que

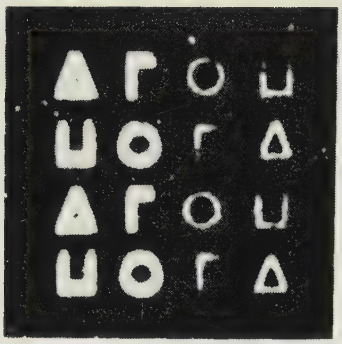
$$2\left(a + \frac{a'}{2}\right) \leqslant b \tag{7-14}$$

Le dédoublement b étant déterminé par les caractéristiques géométriques du prisme de Savart, il faudra choisir un compromis entre deux possibilites extremes : enregistrer l'objet avec la bande passante maximale et restituer avec une source infiniment fine ou, limiter énormément la bande passante et utiliser une source de restitution relativement large.

4 - RESULTATS EXPERIMENTAUX

La figure 7-6 montre les premiers résultats obtenus pour un objet relativement simple consituté de figures géométriques de fort contraste (deux premières colonnes) et de contraste plus faible (troisième et quatrième colonne). Sur la figure 7-6a on voit l'objet initial et sur la figure 7-6b le résultat obtenu après soustraction des deux premières lignes.

...



a

b

Figure 7-6

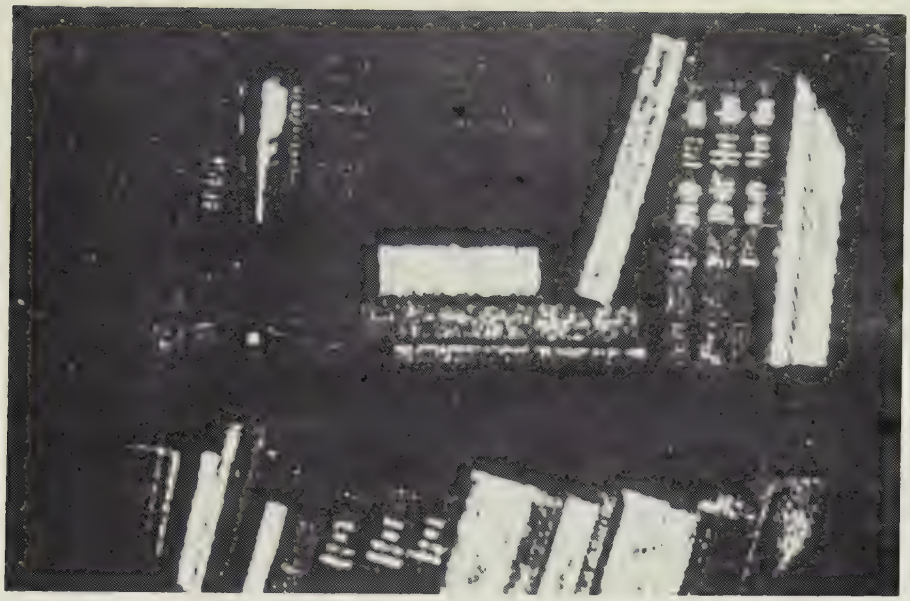
Dans le but de chiffrer la qualité de la soustraction on a utilisé comme objet un champ uniformément éclairé. En mesurant le flux diffracté dans le premier ordre par les hologrammes on a obtenu un rapport de 1 à 20 entre un hologramme avec soustraction et un hologramme sans soustraction, ce qui correspond à une atténuation de 13 dB.

La figure 7-7 correspond à la soustraction d'un objet beaucoup plus complexe. On a enregistré deux photographies d'un rayonnage de bibliothèque, un des livres ayant été enlevé entre les deux photographies. La figure 7-7c correspond à la différence des clichés 7-7a et 7-7b. Les résultats des figures 7-6 et 7-7 ont été obtenus en utilisant un prisme de Wollaston donnant 15 franges par millimètre. La restitution avait lieu en lumière cohérente.

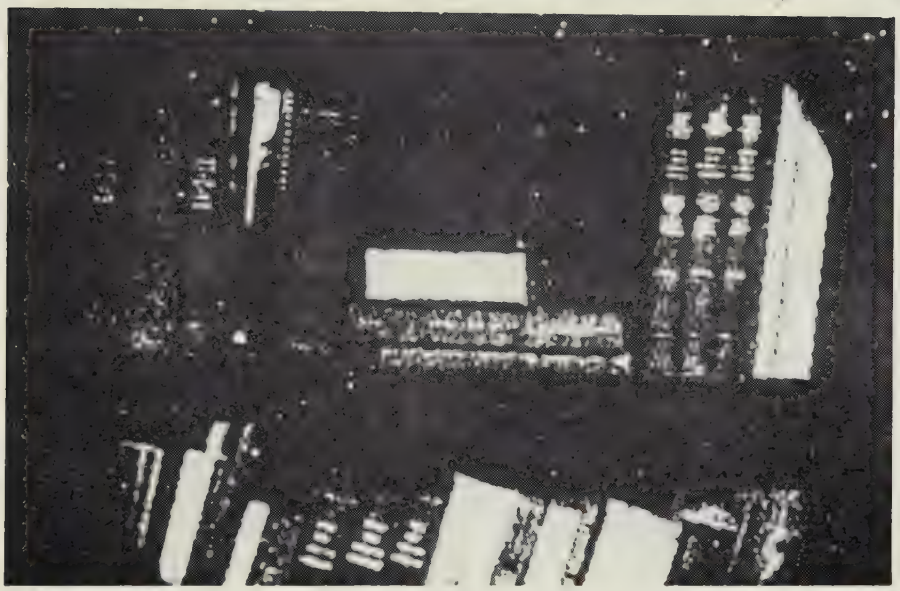
La figure 7-8 montre les résultats obtenus dans une expérience ultérieure réalisée à l'aide d'un prisme de Savart de 20mm d'épaisseur situé devant un objectif photographique de 65mm de distance focale. La restitution avait lieu avec une fente de 2mm. La figure 7-9 montre une soustraction effectuée directement sur un objet à trois dimensions, sans utiliser de photographies intermédiaires. Les deux composants qui ont été "oubliés" sur l'objet 7-9b sont mis en évidence sur le cliché 7-9c.

Dans le but de limiter la diffusion par l'émulsion de l'hologramme et donc pour réduire le bruit, les restitutions étaient effectuées dans tous les cas en plaçant l'hologramme-image dans une cuve à immersion. A titre d'exemple pour illustrer l'importance de cette précaution, la figure 7-10 montre l'aspect d'un morceau de film partiellement immergé placé dans la cuve, le bruit est nettement plus important dans la partie non immergée.

...



a



b

c

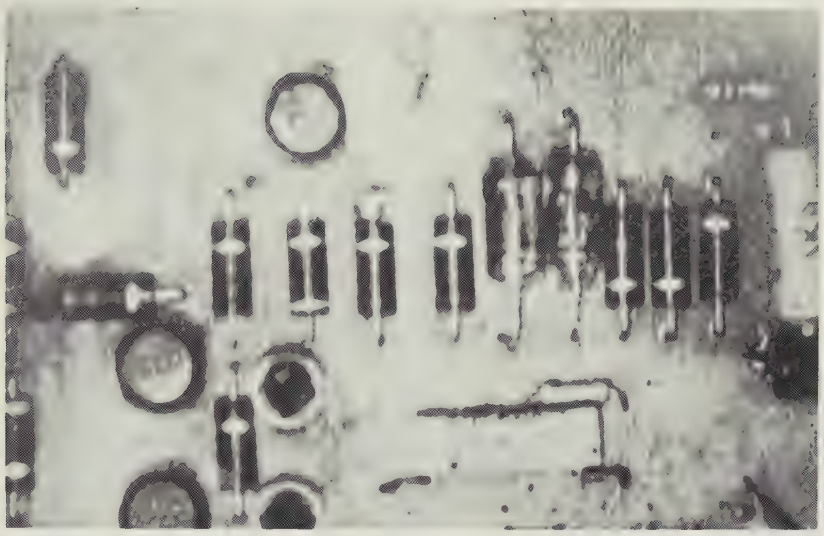
Figure 7-7

a

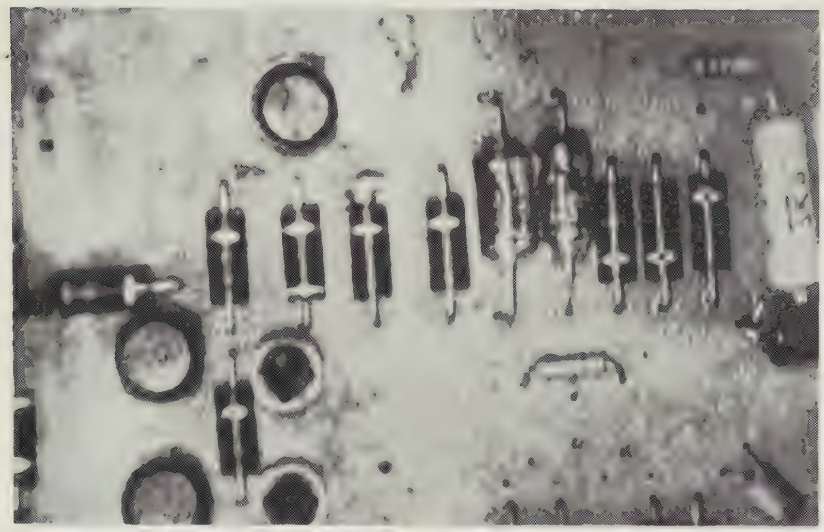
b

c

Figure 7-8



a



b

c

Figure 7-9

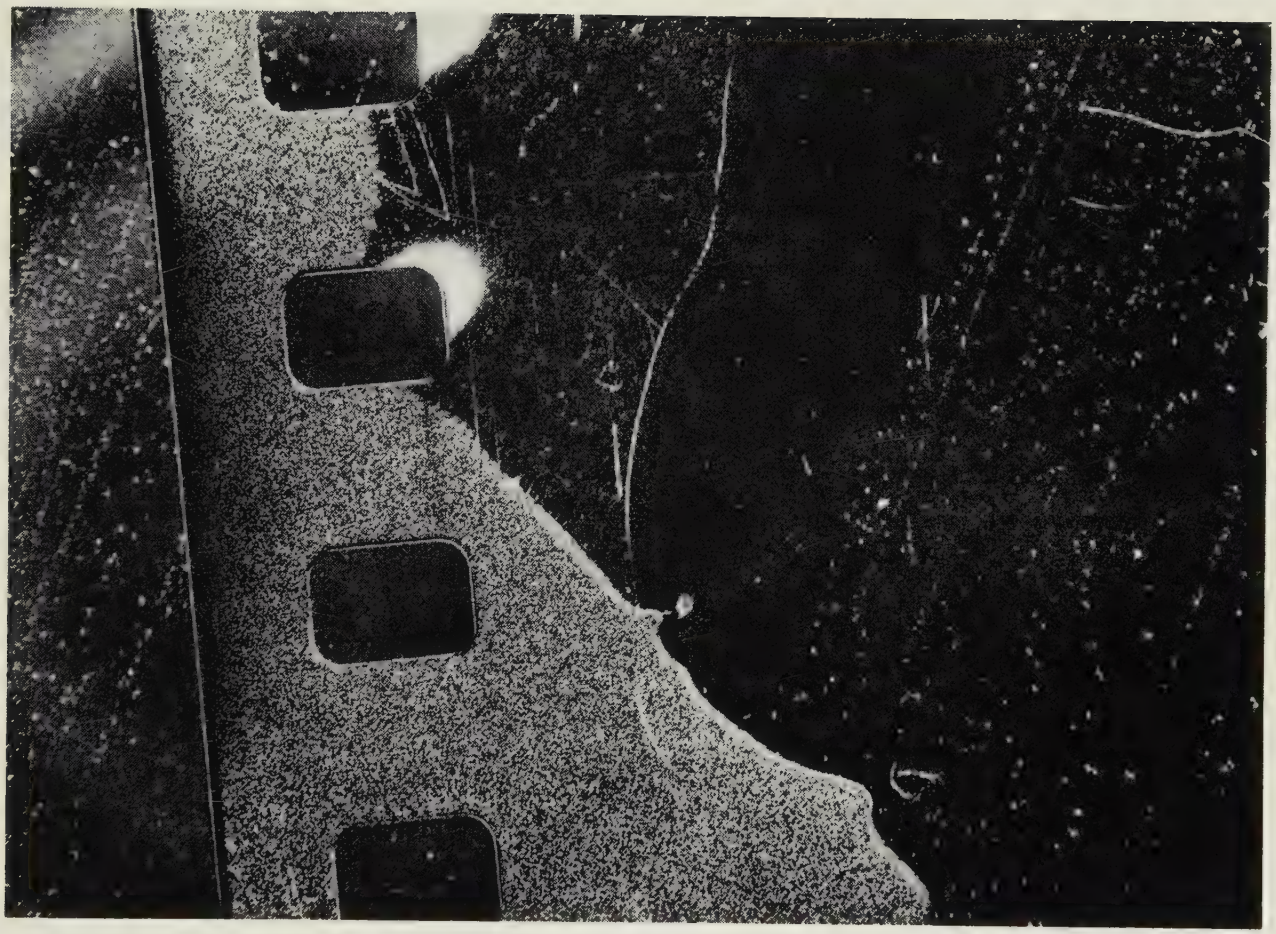


Figure 7-10

5 - CONCLUSION

On a montré dans le présent chapitre qu'il était possible, à l'aide de dispositifs biréfringents, de réaliser une soustraction de luminances. Les différents résultats montrent une progression très nette dans la qualité des soustractions obtenues.

On peut remarquer que, quelque soit le système biréfringent utilisé on obtient une soustraction exacte même si les franges ne sont pas parfaitement rectilignes, ceci est en particulier le cas du prisme de Savart . La condition importante à remplir est que le système de franges d'interférence soit remplacé par le système complémentaire, La distorsion des franges ne produit qu'une distorsion du spectre et, dans la mesure où les différents ordres ne viennent pas à se superposer, le filtrage peut être réalisé et la soustraction obtenue. Dans le but d'augmenter le dédoublement et d'obtenir des franges rectilignes dans un champ plus grand, nous prévoyons actuellement d'utiliser un prisme de Wollaston modifié {40} de 30mm. d'épaisseur qui produira un dédoublement de 3mm.

CHAPITRE 8

CONCLUSIONS

L'étude que nous venons de présenter a trouvé son origine dans le fait que d'une part, la transformation de Hilbert qui s'exprime mathématiquement sous forme d'un produit de convolution peut être réalisée simplement à l'aide d'un montage à double diffraction, et que d'autre part, la transformée de Hilbert, réalisée optiquement, permet de visualiser des objets de phase de basses fréquences.

En ce qui concerne la visualisation d'objets de phase, il existe un grand nombre de méthodes, chacune ayant son champ d'application propre. On peut cependant dire qu'en règle générale, l'étude d'objets étendus à déphasages faibles et à variations lentes présente des difficultés, quelle que soit la méthode utilisée. Certains dispositifs, tels que la méthode de Twyman-Green et l'interférométrie en lumière polarisée utilisent des interférences à deux ondes. Les méthodes d'interférométrie en lumière polarisée, par exemple, présentent une grande sensibilité, cependant dans le cas de variations lentes de phase sur des objets étendus, leur utilisation est restreinte.

Les méthodes telles que la strioscopie et le contraste de phase, qui introduisent dans le plan spectral d'un montage à double diffraction une bande ou une pastille opaque (strioscopie) ou absorbante et déphasante (contraste de phase), présentent une "zone morte" pour les basses fréquences spatiales et ne peuvent être utilisées.

Une autre possibilité réside dans l'utilisation du contraste de phase à couteau, mais il s'avère que cette technique n'est pas non plus applicable aux objets de basses fréquences. Ceci nous a conduit à effectuer une étude comparative de la méthode par transformation de

...

Hilbert et de la méthode de Foucault (pratiquement la seule utilisée pour visualiser des objets faiblement déphasants de basses fréquences).

Après avoir rappelé les propriétés mathématiques de la transformation de Hilbert, on a analysé les conditions de réalisation pratique d'une telle transformation et l'on a en particulier étudié l'influence de l'absorption et du déphasage du "filtre de Hilbert". Au cours de cette étude, on a pu voir que l'influence d'une erreur de déphasage par rapport à la valeur théorique de 180° était très importante et perturbait notablement les phénomènes observés. Par contre, une légère absorption de l'une des plages du filtre n'est pas critique.

La comparaison de la méthode de Foucault et de la méthode par transformation de Hilbert, appliquée à l'étude d'une aberration sphérique du troisième ordre, a montré que, d'une façon générale, la méthode par transformation de Hilbert permet d'améliorer la sensibilité, tant dans le cas des fortes aberrations que dans le cas des faibles aberrations. Cependant, dans le cas des faibles aberrations, il faut utiliser un filtre présentant une certaine absorption sur l'une des plages (Transformée de Hilbert mixte) de façon à introduire un fond cohérent qui permet de détecter un défaut de phase par une variation d'éclairement dans l'image, proportionnelle au défaut et non au carré de celui-ci, ceci lorsque le couteau est centré. Lorsque le couteau n'est plus centré dans le plan spectral, l'avantage de la méthode par transformée de Hilbert réside dans le fait que la quantité de lumière présente dans l'image ne change pas, alors que la méthode de Foucault tend à donner soit un champ complètement éclairé, soit un champ complètement obscur.

Parmi les difficultés que l'on rencontre dans l'emploi de la transformée de Hilbert, la principale semble tenir à la réalisation du filtre déphasant qui doit être construit de façon très précise, tant en ce qui concerne le déphasage introduit que la précision de la séparation entre plage déphasante et non déphasante. Ceci nous a

...

conduits à étudier plusieurs dispositifs spéciaux, en particulier un filtre permettant d'obtenir une transformation de Hilbert en lumière blanche. Cependant, il ne nous a pas été possible, par suite de problèmes purement technologiques, de remplir simultanément les deux conditions : déphasage exactement égal à 180° et limite de séparation infiniment fine (comparée à la largeur de la tache de diffraction du système à étudier dans le cas d'une aberration, par exemple). Cette dernière condition nous a conduits à restreindre notre étude expérimentale à des systèmes optiques peu ouverts et l'avantage de la méthode de Foucault reste d'utiliser un couteau que l'on peut réaliser avec une très bonne précision (lame de rasoir).

La transformation de Hilbert étant réalisée en optique cohérente, nous avons été amenés à étudier le problème du bruit dans un tel montage. On a pu montrer que l'emploi d'une source rectiligne parallèle à l'arête du couteau de phase augmente le rapport signal sur bruit proportionnellement à la racine carrée de la longueur de la source et l'on a décrit un dispositif à miroir vibrant qui permet de synthétiser une telle source linéaire incohérente à l'aide d'un laser.

On a montré d'autre part que l'utilisation d'un filtre réalisé à partir de lames biréfringentes permettait d'obtenir la transformée de Hilbert en lumière blanche. Ceci pourrait paraître paradoxal puisque cette Transformée de Hilbert est obtenue dans un montage de filtrage des fréquences spatiales cohérent. Il n'en est rien car, quelle que soit la longueur d'onde, la fréquence zéro occupe la même position dans le plan spectral et, à condition de disposer d'un filtre achromatique, on peut déphaser les fréquences négatives par rapport aux fréquences positives pour toutes les radiations émises par la source.

L'utilisation d'un filtre de Hilbert décentré nous a amenés à étudier le problème de visualisation de défauts de hautes fréquences et à montrer que l'on peut réaliser un "contraste de phase" quel que soit le déphasage introduit. Seule est importante en fait l'absorption du filtre; les résultats expérimentaux relatifs aux micro-

...

défauts de surface des pièces optiques (micromamelonnage) confirment parfaitement les conclusions théoriques, qu'ils aient été obtenus à partir de filtres purement absorbants ou réalisés à l'aide de polariseurs.

La dernière partie de l'étude a été consacrée à la soustraction de luminances. Cette méthode d'abord destinée à améliorer les images obtenues par la méthode par transformation de Hilbert (ou par la méthode de Foucault), s'avère très prometteuse dans des domaines aussi différents que l'analyse de clichés météorologiques, le pilotage automatique ou les problèmes de surveillance en général.

Les résultats successifs obtenus permettent d'espèrer que cette technique sera opérationnelle dans un avenir assez proche.

En conclusion, la méthode d'observation d'objets de phase de basses fréquences par transformation de Hilbert apporte un gain par rapport à la méthode de Foucault, mais son emploi est conditionné par l'obtention d'un bon "filtre de Hilbert". De plus, cette étude de la transformée de Hilbert nous a permis de mettre au point d'autres techniques d'analyse, telles que le "contraste de phase à déphasage nul" ou la méthode de soustraction de luminances que nous sommes actuellement en train de développer.

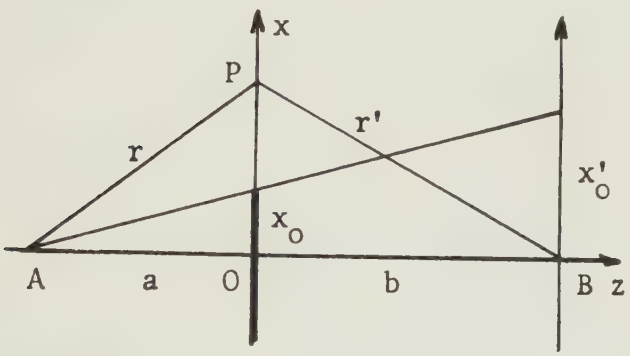
ANNEXE A

On rappelle ici les résultats généraux relatifs à la diffraction à distance finie et l'on applique ces résultats au cas de l'écran opaque et de l'écran déphasant.

Diffraction par un bord d'écran

Soit une source ponctuelle A située à une distance a d'un écran E et soit à calculer l'éclairement en un point B derrière cet écran au voisinage immédiat de l'"ombre" du bord d'écran.

Nous choisissons un système d'axes Oxyz dans le plan de l'écran, Oz étant confondu avec AB et Oy parallèle au bord de l'écran.



En appliquant le principe d'Huygens-Fresnel, on peut calculer quel est l'éclairement en B.

Figure A-1

Un petit élément de surface dxdy situé en P dans le plan Oxy reçoit de A une vibration de la forme

$$\frac{A_o}{r} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}r}$$

et réémet vers B une amplitude

$$dA = -\frac{i}{\lambda} f(xy) \frac{A_o}{ab} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(r+r')} dxdy. \qquad (A-1)$$

où f(x,y) représente "la transparence" du plan Oxy, et compte tenu de l'approximation des petits angles.

...

Les angles étant petits,

$$r+r' = APB \simeq a+ \frac{x^2+y^2}{2a} +b + \frac{x^2+y^2}{2b} = a+b + \frac{a+b}{2ab} (x^2+y^2)$$

A un facteur de phase constant près, l'amplitude diffractée en B est :

$$dA = \frac{-i}{\lambda ab} \quad f(x,y)\ e^{\,i\frac{\pi}{\lambda}\frac{a+b}{ab}(x^2+y^2)}\ dxdy \qquad (A-2)$$

soit en posant $\sqrt{\frac{2(a+b)}{ab\lambda}}\ y=u$ et $\sqrt{\frac{2(a+b)}{ab\lambda}}\ x = v$

$$A = \frac{-i}{2(a+b)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\pi u^2}{2}}\ du \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\frac{\pi}{2}v^2}\ dv \qquad (A-3)$$

Soit, puisque

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{\pi u^2}{2}}\ du \right|^2 = 4 \left| \int_{o}^{\infty} e^{i\frac{\pi u^2}{2}}\ du \right|^2 = 2$$

un éclairement

$$E = \frac{E_o}{2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ e^{i\pi\frac{v^2}{2}}\ dv \right|^2 \qquad (A-4)$$

E_o étant l'éclairement que produirait le point A en l'absence d'écran.

Dans le cas d'un filtre déphasant de π d'arête parallèle à oy

$$\begin{cases} f(x) = 1 \text{ pour } x > x_o \\ \\ \quad\ =-1 \text{ pour } x < x_o \end{cases} \qquad (A-5)$$

...

Il vient

$$E = \frac{E_o}{2} \left| -\int_{-\infty}^{0} - \int_{0}^{v_o} + \int_{0}^{\infty} - \int_{0}^{v_o} e^{i \frac{\pi v^2}{2}} dv \right|^2$$

$$= \frac{E_o}{2} \left| -2 \int_{0}^{v_o} e^{i \frac{v^2}{2}} dv \right|^2$$

Soit en explicitant les intégrales de Fresnel

$$\xi(v_o) = \int_{0}^{v_o} \cos \frac{\pi v^2}{2} dv \qquad \eta(v_o) = \int_{0}^{v_o} \sin \frac{\pi v^2}{2} dv \qquad \text{(A-6)}$$

$$E = 2 E_o \left[\xi^2(v_o) + \eta^2(v_o) \right] \qquad \text{(A-7)}$$

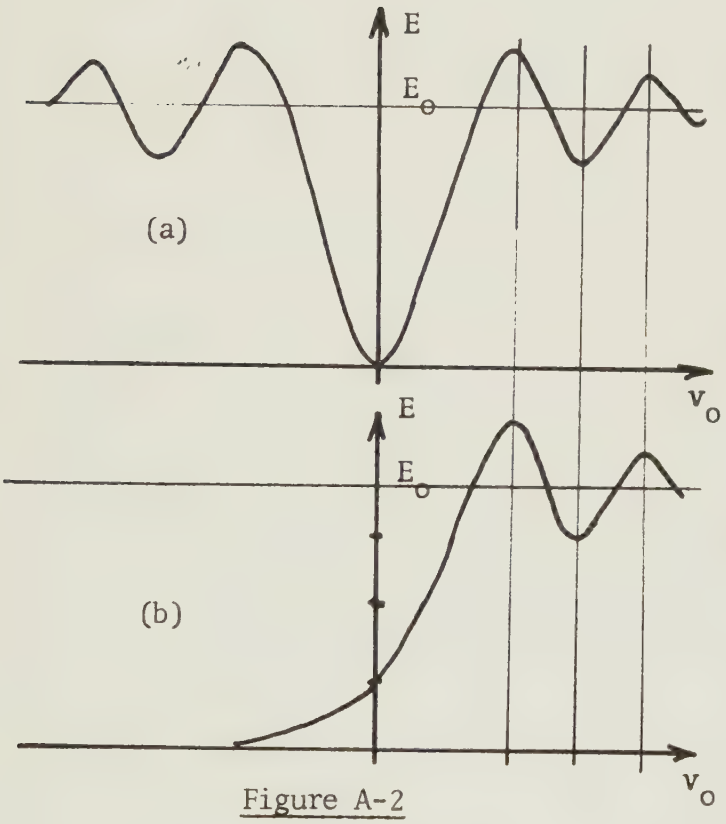


Figure A-2

On a représenté sur la figure A-2(a) les variations de l'éclairement en fonction de v_o.

On observe une bande obscure entourée de franges de diffraction.

On a représenté sur la même figure l'éclairement obtenu dans les mêmes conditions à l'aide d'un demi-plan opaque (figure A-2(b)).

On constate que les maxima ont lieu pour la même valeur de v_o (égale à 1,22 pour le premier maximum), c'est-à-dire pour des points B situés à des distances de l'ombre géométrique, égales à :

$$x'_o = \frac{a+b}{a} x_o = \sqrt{\frac{\lambda b(a+b)}{2a}} v_{o_{max}}$$

...

La figure A-2 montre très nettement qu'il sera incomparablement plus facile de pointer la frange noire que le bord de l'ombre dont l'éclairement est le quart de l'éclairement du champ libre.

ANNEXE B

Calcul de la transformée de Hilbert d'une aberration sphérique faible

Considérons le cas d'un instrument à pupille circulaire de rayon R_o et calculons l'éclairement suivant une droite d'abscisse y (figure B-1).

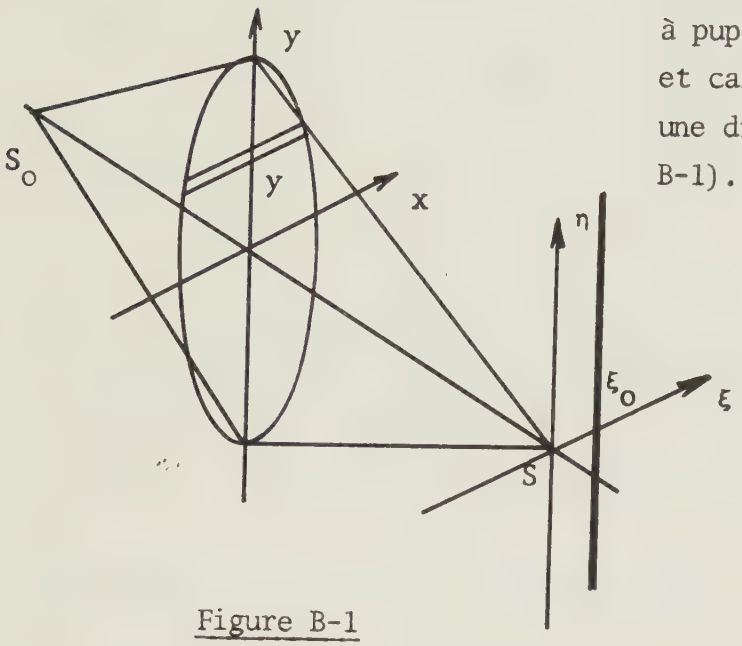


Figure B-1

Remarque

Nous considérons une pupille circulaire dans un but de simplicité et parce que ce cas est le plus fréquent, mais le calcul reste valable dans les autres cas. En effet, d'après le théorème de réduction, la réponse suivant une droite d'ordonnée y_o ne dépend que de la valeur de la fonction objet suivant cette droite et, d'autre part, une translation de l'objet produit une simple translation de l'image. On peut donc toujours considérer, à l'ordonnée y_o un segment de droite centré sur la valeur $x = 0$.

L'onde objet entachée d'aberration sphérique s'écrit :

$$f(x,y) = \text{rect}\,\frac{x}{2R}\,\exp\left(\frac{i2\pi}{\lambda}\left[\alpha\,\frac{(x^2+y^2)^2}{R^4} + \beta\,\frac{x^2+y^2}{R^2} + \gamma\right]\right) \qquad \text{(B-1)}$$

où $R = \sqrt{R_o^2 - y^2}$ fixe la dimension du champ,

α la valeur de l'aberration sphérique,

β et γ la position du centre de la sphère de référence sur l'axe du système.

...

• $\beta = \gamma = 0$ correspond à une sphère de référence centrée au foyer paraxial :

$$\delta = \alpha \frac{(x^2 + y^2)^2}{R^4}$$

• $\beta = -\alpha$; $\gamma = 0$ correspondent à une sphère de référence centrée au meilleur foyer:

$$\delta = \alpha \frac{x^2 + y^2}{R^2} \left(\frac{x^2 + y^2}{R^2} - 1 \right)$$

• $\beta = -2\alpha$; $\gamma = \alpha$ correspondent à une sphère de référence centrée au foyer marginal :

$$\delta = \alpha \left(\frac{x^2 + y^2}{R^2} - 1 \right)^2$$

Dans le cas général, lorsque l'arête du couteau de phase n'est pas située sur l'axe du système, la réponse dans le plan de l'image sera :

$$r(x,y) = f(x,y) * \frac{-i}{\pi x} e^{-i2\pi u_o x} \qquad (B\text{-}2)$$

où u_o fixe l'enfoncement latéral du couteau

$$u_o = \frac{\xi_o}{\lambda d} \qquad (B\text{-}3)$$

Dans le cas d'une aberration faible, f(x,y) s'écrit :

$$f(x,y) = \text{rect} \frac{x}{2R} \left[1 + i \frac{2\pi}{\lambda} \left(\alpha \left(\frac{x^2+y^2}{R^2} \right)^2 + \frac{x^2+y^2}{R^2} + \gamma \right) \right] \qquad (B\text{-}4)$$

On peut alors calculer la réponse :

$$r(x,y) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t,y) \frac{e^{-i2\pi u_o t}}{t} dt$$

$$r(x,y) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect} \frac{x-t}{2R} \left(1 + i \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{\alpha y^4}{R^4} + \frac{\beta y^2}{R^2} + \gamma + \frac{\alpha (x-t)^4}{R^4} + \left(\frac{2\alpha y^2}{R^4} + \frac{\beta}{R^2} \right) (x-t)^2 \right] \right) \frac{e^{-i2\pi u_o t}}{t} dt$$

Soit encore, en regroupant les termes de même degré par rapport à la variable d'intégration :

...

$$r(x,y) = -\frac{i}{\pi}\int_{x+R}^{x-R}\left(1+i\,\frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{\alpha y^4}{R^4}+\frac{\beta y^2}{R^2}+\gamma+\frac{\alpha x^4}{R^4}+\left(\frac{2\alpha y^2}{R^4}+\frac{\beta}{R^2}\right)x^2\right]\right)\frac{e^{-i2\pi u_o}}{t}$$

$$-\frac{i}{\pi}\int_{x+R}^{x-R} i\,\frac{2\pi}{\lambda}\left[-\frac{4dx^3}{R^4}-2x\left(\frac{2\alpha y^2}{R^4}+\frac{\beta}{R^2}\right)\right]e^{-i2\pi u_o t}\,dt$$

$$-\frac{i}{\pi}\int_{x+R}^{x-R} i\,\frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{6\alpha x^2}{R^4}+\frac{2\alpha y^2}{R^4}+\frac{\beta}{R^2}\right]t\,e^{-i2\pi u_o t}\,dt$$

$$-\frac{i}{\pi}\int_{x+R}^{x-R} i\,\frac{2\pi}{\lambda}\left[-\frac{4\alpha x}{R^4}\right]t^2 e^{-i2\pi u_o t}\,dt-\frac{i}{\pi}\int_{x+R}^{x-R} i\frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{\alpha}{R^4}\,t^3 e^{-i2\pi u_o t}$$

Posons : $a_o = 1 + i\,\frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{\alpha y^4}{R^4}+\frac{\beta y^2}{R^2}+\gamma+\frac{\alpha x^4}{R^4}\left(\frac{2\alpha y^2}{R^4}+\frac{\beta}{R^2}\right)x^2\right]$

$$a_1 = -\frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2x\left[\frac{2\alpha x^2}{R^4}+\frac{2\alpha y^2}{R^4}+\frac{\beta}{R^2}\right]$$

$$a_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{6\alpha x^2}{R^4}+\frac{2\alpha y^2}{R^4}+\frac{\beta}{R^2}\right] \qquad \text{(B-5)}$$

$$a_3 = -\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{4\alpha x}{R^4}$$

$$a_4 = \frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{\alpha}{R^4}$$

La réponse s'écrit :

$$r(x,y) = a_o r_o(x,y) + \frac{1}{\pi}\left[a_1\int_{x+R}^{x-R} e^{-i2\pi u_o t}\,dt + a_2\int_{x+R}^{x-R} t\,e^{-i2\pi u_o t}\,dt\right.$$

$$\left. + a_3\int_{x+R}^{x-R} t^2 e^{-i2\pi u_o t}\,dt + a_4\int_{x+R}^{x-R} t^3 e^{-i2\pi u_o t}\,dt\right]$$

...

où

$$r_o = \frac{i}{\pi}\left[C_i\left|2\pi u_o(x+R)\right| - C_i\left|2\pi u_o(x-R)\right| + i\,S_i\left(2\pi u_o(x-R)\right) - S_i\left(2\pi u_o(x+R)\right)\right] \quad \text{(B-6)}$$

est la réponse dans le cas d'un système optique parfait.

On peut encore écrire r(x,y) sous la forme :

$$r(x,y) = a_o r_o + \frac{1}{\pi}\left[a_1 I_1 + a_2 I_2 + a_3 I_3 + a_4 I_4\right] \quad \text{(B-7)}$$

avec

$$I_1 = \int_{x+R}^{x-R} e^{-i2\pi u_o t}\, dt$$

$$I_2 = \int_{x+R}^{x-R} t\, e^{-i\,2\pi u_o t}\, dt \quad \text{(B-8)}$$

$$I_3 = \int_{x+R}^{x-R} t^2\, e^{-i2\pi u_o t}\, dt$$

$$I_4 = \int_{x+R}^{x-R} t^3\, e^{-i2\pi u_o}\, dt$$

Les intégrales I se calculent simplement et si l'on pose pour simplifier

$$2\pi u_o x = X$$

$$\frac{\sin 2\pi u_o R}{2\pi u_o R} = S \quad \text{(B-9)}$$

$$\frac{\cos 2\pi u_o R}{2\pi u_o R} = C$$

...

on obtient

$$I_1 = -\,2R\, e^{-iX}\, S$$

$$I_2 = -\,2R\, e^{-iX}\left[xS + iRC\right] - \frac{i}{2\pi u_o} I_1$$

$$I_3 = -\,2R\, e^{-iX}\left[(x^2+R^2)S + 2ixRC\right] - \frac{2i}{2\pi u_o} I_2 \qquad \text{(B-10)}$$

$$I_4 = -\,2R\, e^{-iX}\left[x(x^2+R^2)S + iR(3x^2+R^2)C\right] - \frac{3i}{2\pi u_o} I_3$$

Lorsque l'enfoncement du couteau de phase est nul, les résultats précédents ne sont pas utilisables, car les expressions B-6 et B-8 sont alors des formes indéterminées et il faut reprendre les calculs.

En ce qui concerne $r_o(x,y)$ on obtient un résultat déjà connu

$$r_o = \frac{i}{\pi} \text{Log} \left|\frac{x+R}{x-R}\right| \qquad \text{(B-6')}$$

En ce qui concerne les intégrales I, on obtient immédiatement les nouvelles valeurs :

$$I'_1 = \int_{x+R}^{x-R} dt = 2R$$

$$I'_2 = \int_{x+R}^{x-R} t\, dt = -2Rx$$

$$I'_3 = \int_{x+R}^{x-R} t^2\, dt = -\frac{2R}{3}(3x^2+R^2) \qquad \text{(B-8')}$$

$$I'_4 = \int_{x+R}^{x-R} t^3\, dt = -\,2Rx(x^2+R^2)$$

En résumé, on obtient dans le plan image un éclairement

$$E_H(x,y) = |r(x,y)|^2 \qquad \text{(B-11)}$$

...

avec

$$r(x,y) = a_o r_o + \frac{1}{\pi}\,(a_1 I_1 + a_2 I_2 + a_3 I_3 + a_4 I_4) \qquad \text{(B-12)}$$

où

$$a_o = 1 + i\,\frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{\alpha y^4}{K^4} + \frac{\beta y^2}{R^2} + \gamma + \frac{\alpha x^4}{R^4} + \left(\frac{2\alpha y^2}{R^4} + \frac{\beta}{R^2}\right)x^2\right]$$

$$a_1 = -\frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2x\left[\frac{2\alpha x^2}{R^4} + \frac{2\alpha y^2}{R^4} + \frac{\beta}{R^2}\right] \qquad \text{(B-13)}$$

$$a_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{6\alpha x^2}{R^4} + \frac{2\alpha y^2}{R^4} + \frac{\beta}{R^2}\right]$$

$$a_3 = -\frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{4\alpha x}{R^4}$$

$$a_4 = \frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{\alpha}{R^4}$$

et, suivant que l'excentrement $u_o = \frac{\xi_o}{\lambda d}$ est nul ou pas :

	Filtre centré $u_o = 0$	Filtre décentré $u_o \neq 0$
r_o	$\frac{i}{\pi}\,\mathrm{Log}\left\lvert\frac{x+R}{x-R}\right\rvert$	$\frac{i}{\pi}\Big(C_i\lvert 2\pi u_o(x+R)\rvert - C_i\lvert 2\pi u_o(x-R)\rvert + i\left\{S_i\left[2\pi u_o(x-R)\right] - S_i\left[2\pi u_o(x+R)\right]\right\}\Big)$
I_1	$-2R$	$-2R\,e^{-iX}\,S$
I_2	$-2Rx$	$-2R\,e^{iX}\left[xS+iRC\right] - \frac{i}{2\pi u_o} I_1$
I_3	$-\frac{2R}{3}(3x^2+R^2)$	$-2R\,e^{-iX}\left[(x^2+R^2)S+2ixRC\right] - \frac{2i}{2\pi u_o} I_2$
I_4	$-2Rx(x^2+R^2)$	$-2Re^{-iX}\left[x(x^2+R^2)S+iR(3x^2+R^2)C\right]\frac{3i}{2\pi u_o} I_3$

(B-14)

avec $X = 2\pi u_o x$

$$S = \frac{\sin 2\pi u_o R}{2\pi u_o R} \qquad C = \frac{\cos 2\pi u_o R}{2\pi u_o R} \qquad \text{(B-15)}$$

REFERENCES

{1} M. FRANÇON - Revue d'Optique (1951), t.31 n° 2, p.65-86

{2} H. WOLTER - Handbuch der Physik (1956), vol.XXIV, p.554-641

{3} G. NOMARSKI et A.R. WEILL - (1955), Rev.de Métallurgie L11, n° 2, p.121-134

{4} A. MARECHAL et M. FRANÇON - Diffraction, structure des images, Ed.Rev.Opt. (1960), Paris

{5} L. FOUCAULT - Etude optique des surfaces (1858), Armand Colin, Paris

{6} F. ZERNIKE - M.N.R.A.S. (1934), vol.94, p.377-384

{7} M. FRANÇON - Le contraste de phase en optique et en microscopie, Ed.Rev.Opt. (1950), Paris

{8} S. LOWENTHAL et Y. BELVAUX - Appl. Phys. Letters (1967), n° 2, p.49-51

{9} Y. BELVAUX et J.C. VAREILLE - Nouv.Rev.Opt. (1971) 2 n° 3, p.149-162

{10} Y. BELVAUX et S. LOWENTHAL - C.R.Ac.Sc.(1969), vol.269 n° 18,p.894-896

{11} A. MARECHAL et P. CROCE - C.R.Ac.Sc.(1953), 237, p.607-609

{12} E.H. LINFOOT - The Foucault test, Recent advances in Optics (1950) Clarendon Press, Oxford, p.128-174

{13} Y. BELVAUX et J.C. VAREILLE, Opt.Comm. (1970), 2 , n° 3, p.101-104

{14} H. OSTERBERG - J.Opt.Soc.Am. (1947), 37, p. 726-730

{15} G. YVON - Contrôle des Surfaces Optiques, Ed.Rev.Opt.(1926) Paris

{16} Tables of Integral Transform (1954), Mc Graw-Hill, New York

{17} M. BORN et E. WOLF, Principles of Optics, Pergamon Press, New-York(1964)

{18} H. ROYER et F. ALBE - C.R.Ac.Sc. (1970), 270, p.525-528

{19} A. MARECHAL, Imagerie géométrique, Ed.Rev.Opt.Paris (1952)

{20} A. KASTLER, Rev.Opt. (1950), 29, pp. 307-314

{21} M. PHILBERT, Optica Acta (1967), 14, 2, p.169-181

...

{22} Y. BELVAUX et S. LOWENTHAL, C.R.Ac.Sc.(Paris)(1969) 269, p.894-896

{23} Y. BELVAUX et S. LOWENTHAL, Appl. Opt. (1971), 10, n° 3, p.676-677

{24} M. CAGNET, Rev.Opt. (1954), 33, p.113-124

{25} B. LYOT, C.R.Ac.Sc.(Paris) (1946), 765

{26} M. FRANÇON , Colloques de la Commission Internationale d'Optique (Rev.Opt.Paris, 1952)

{27} D. GABOR, G.W. STROKE, R. RESTRIKE, A. FUNKHOUSER et D. BRUMM, Phys.Letters 18 (1965) 116

{28} K. BROMLEY, M.A. MONAHAN et J.F. BRYANT, Appl. Phys.Letters 14 (1969) 67

{29} S.H. LEE, S.K. YAO et A.G. MILNES, J.Opt.Soc.Amer. 60 (1970) 172

{30} L.G. COLLINS, Appl. Opt. 7 (1968) 203

{31} S. DEBRUS, M. FRANÇON et C.P. GROVER, Opt.Comm.4 (1971) 172

{32} K.S. PENNINGTON, P.M. WILL et G.L. SHELTON, Opt.Comm.2 (1970) 113

{33} S. LOWENTHAL et J. BRAAT, Appl.Opt. 10 (1971) 2553

{34} P. KUNSTMANN et H.J. SPITSCHAN, Opt.Comm.4 (1971) 166

{35} A.W. LOHMANN et D.P. PARIS, J.Opt.Soc.Amer.56 (1966) 537 A

{36} S. LOWENTHAL, J. SERRES et C. FROEHLY, C.R.Ac.Sc.(PARIS) 268 B (1969) 1481

{37} A. ASPECT, thèse Orsay (1971)

{38} K. BIEDERMANN, Optik, 28 (1968) 160

{39} Y. BELVAUX, S. LOWENTHAL et T. SAIMI, Opt.Comm.5 n° 3, (1972) PP. 145-147

{40} M. FRANÇON et S. MALLICK, Polarization interferometers, Wiley - Intersciences, (1972) London

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

PERMIS D'IMPRIMER

Doctorat D'ETAT

Thèse de SCIENCES PHYSIQUES

Nom BELVAUX

Prénoms Yves Jean-Marie

Date et lieu de naissance 24 Octobre 1938 à ROUBAIX (Nord)

SUJET :

Thèse : " Réalisation optique de la transformée de Hilbert et applications".

Vu et approuvé :

Orsay, le 4 Mai 1973

Le Vice-Président du Centre d'Orsay :

UNIVERSITE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

Service de Reprographie
C.N.R.S.
Gif